

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Katarina Blom, telefon 772 10 97
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: V, e.m.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

- 1 En $n \times n$ matris $\mathbf{D}$ är positivt definit om $\mathbf{D}$ är symmetrisk (dvs $\mathbf{D} = \mathbf{D}^T$) och om $\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} > 0$ för alla $n \times 1$ vektorer $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$

- (a) Låt $\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$. Visa att $\mathbf{D}$ *inte* är positivt definit. (3p)

- (b) Låt

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}$$

vara en $n \times n$ diagonalmatris. Visa att $\mathbf{D}$ är positivt definit bara om alla diagonalelementen $d_i > 0$. (4p)

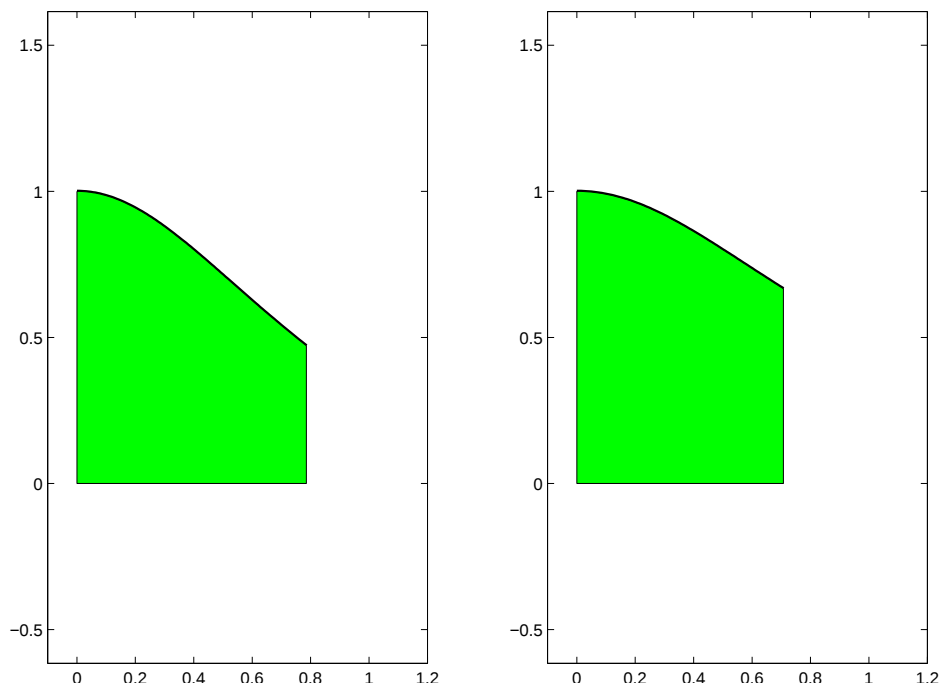
- (c) Antag att $\mathbf{D}$ är en $n \times n$ positivt definit diagonalmatris. Vilken rang har då matrisen. Motivera ditt svar. (2p)

(a) $\begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5x_1 \\ 5x_2 \end{bmatrix} = -5x_1^2 + 5x_2^2$

och $-5x_1^2 + 5x_2^2 < 0$ för tex $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(b) $\mathbf{x}^T \mathbf{D} \mathbf{x} = \sum_{i=1}^n d_i x_i^2$ som är > 0 för alla $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ bara om alla $d_i > 0$

- (c) Rang n . Eftersom $\mathbf{D}$ är positivt definit är alla diagonalelementen nollskilda, dvs det finns ett pivotelement i varje kolonn i $\mathbf{D}$.
-



2

I den vänstra figuren ovan har man färglagt arean som innesluts av $f(x) = \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x}$ och x-axeln mellan 0 och $\frac{\pi}{4}$. I den högra figuren har man färglagt arean som innesluts av $g(x) = \frac{1}{1 + x^2}$ och x-axeln, mellan 0 och $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(a) Visa att areorna i bägge figurerna är lika stora (3p)

(b) Beräkna arean (2p)

(a) Arealen av det vänstra området ges av $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{1 + \sin^2 x} dx = \left[\begin{array}{l} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \\ x = 0 \rightarrow t = 0 \\ x = \frac{\pi}{4} \rightarrow t = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{array} \right] = \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + t^2} dt \text{ som är arean av området i den högra figuren.}$$

(b) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1 + t^2} dt = [\arctan t]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \arctan \frac{1}{\sqrt{2}}$

3 (a) Följande begynnelsevärdesproblem utgör en matematisk modell för förtvålning av etylacetat med natriumhydroxid (5p)

$$\begin{cases} y'(t) = (a - y(t))(b - y(t)), t \geq 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

a och b är startkoncentration av etylacetat respektive natriumhydroxid. $y(t)$ är koncentrationen av bildad etanol vid tiden t . Låt $a = 1$ och $b = 2$ och antag att $y < a$ och $y < b$. Lös begynnelsevärdesproblemet.

Ledning: Differentialekvationen är separabel och kan skrivas

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)}y' = 1$$

Använd partialbråksuppdelning för att integrera vänsterledet.

- (b) Lös begynnelsevärdesproblemet i (a) uppgiften på intervallet $0 \leq t \leq 0.5$ med Euler's metod. Använd steglängden $h = 0.25$. (4p)

- (c) Låt

$$y'' + 2y' + 2y = e^{-x} \sin(x)$$

Bestäm alla lösningar till differentialekvationen.

(5p)

Ansätt $y_p = Axe^{-x} \cos(x) + Bxe^{-x} \sin(x)$ för partikulärlösningen.

- (a) Ekvationen kan skrivas

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)}y' = 1$$

Använd partialbråksuppdelning för att integrera vänsterledet

$$\frac{1}{(1-y)(2-y)} = \frac{A}{(y-1)} + \frac{B}{(y-2)}$$

Multiplisera med vänsterledets nämnare

$$1 = A(y-2) + B(y-1) = y(A+B) - 2A - B$$

Identifiering ger

$$\begin{cases} (A+B) = 0 \\ -2A - B = 1 \end{cases}$$

Vi får $A = 1$ och $B = -1$, och

$$\int \frac{1}{(1-y)(2-y)} dy = \int \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y-2} dy = \ln|y-1| - \ln|y-2| + C_1$$

$$\int dt = t + C_2$$

Utnyttja att $0 \leq y < 1$, och vi får

$$\ln(1-y) - \ln(2-y) = t + C$$

$$y(0) = 0 \Rightarrow C = -\ln 2$$

- (b)

$$y(0) = 0$$

$$y\left(\frac{1}{4}\right) = y(0) + h(1 - y(0))(2 - y(0)) = 0 + \frac{1}{4}(1 - 0)(2 - 0) = \frac{1}{2}$$

$$y\left(\frac{1}{2}\right) = y\left(\frac{1}{4}\right) + h\left(1 - y\left(\frac{1}{4}\right)\right)(2 - y\left(\frac{1}{4}\right)) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{2}\right)(2 - \frac{1}{2}) = \frac{11}{16}$$

- (c) Karakteristisk ekvation $r^2 + 2r + 2 = 0$ har rötterna $r_{1,2} = -1 \pm i$ vilket ger homogenlösningarna $y_h = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x)$.

För partikulärlösningen ansätts $y_p = Axe^{-x} \cos(x) + Bxe^{-x} \sin(x)$.

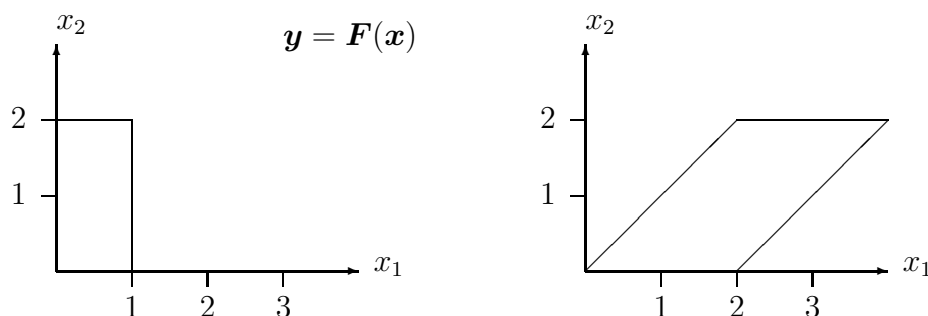
Vi får $y'_p = e^{-x} \cos(x)(A - Ax + Bx) + e^{-x} \sin(x)(B - Bx - Ax)$

och $y''_p = e^{-x} \cos(x)(2B - 2Bx - 2A) + e^{-x} \sin(x)(2Ax - 2A - 2B)$.

$y''_p + 2y'_p + 2y_p = \dots = 2Be^{-x} \cos(x) - 2Ae^{-x} \sin(x)$, dvs vi måste ha $B = 0$ och $A = -1/2$ för att högerledet ska bli $e^{-x} \sin(x)$.

Svar: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-x} \cos(x) + C_2 e^{-x} \sin(x) - \frac{1}{2} x e^{-x} \cos(x)$

4 Betrakta avbildningen som beskrivs av bilden nedan



(a) Ange standardmatrisen $\mathbf{A}$ för avbildningen. (4p)

(b) Vilken standardmatris har den omvända avbildningen $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})$? (4p)

(c) En rotation moturs med vinkeln θ ges av standardmatrisen (3p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

Om vi istället roterar *medurs*, vad får vi då för standardmatris? Motivera ditt svar.

(a) Vi har $F(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $F(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ så $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(b) Avbildningen $\mathbf{x} = \mathbf{F}^{-1}(\mathbf{y})$ har standardmatrisen $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

(c) Roter med vinkeln θ medurs ger samma resultat som att rotera med vinkeln $-\theta$ moturs. Därför får vi standardmatrisen $B = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$

5 Betrakta randvärdesproblemet

$$\begin{cases} -2u'' = 200x, 0 < x < 1 \\ u(0) = 1, u(1) = 2 \end{cases} \quad (5p)$$

(a) Skriv om problemet till en matrisekvation genom att dela in intervallet för x i 5 likformiga delintervall (med längden $h = 0.2$) och ersätta andraderivatan med differensapproximationen $u''(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}$

Vi vill se matrisen och högerledsvektorn.

(b) Hur många elementära radoperationer behöver man (minst) utföra för att radrecuera matrisen från (a) uppgiften till trappstegsform (triangulär form) ? Antag matrisen är av storleken $n \times n$. Motivera ditt svar. (2p)

(c) Beräkna determinanten för matrisen i (a) uppgiften. (4p)

Ledning: Om du inte löst (a)-uppgiften men vill svara på (b) och (c), utgå från att matrisen i (a) har nollskilda element på huvuddiagonalen och de två diagonalerna närmst över och under huvuddiagonalen. Alla andra element är 0.

- (a) Låt $h = 0.2$. Inför $x_i = ih, i = 0, 1, \dots, 5$. Låt $u(x_i) = u_i$. Vi får

$$-2u''(x_i) = -2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} = 200x_i \text{ och}$$

Utnyttja att $u_0 = 1$ och $u_5 = 2$, vi får matrisekvationen

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.8 \\ 1.6 \\ 2.4 \\ 5.2 \end{bmatrix}$$

- (b) För att nollställa diagonalen under huvuddiagonalen behövs $n - 1$ elementära radoperationer.
- (c) $\det A = 5$ (använd tex. cofaktor-utveckling längs första raden)
-

Lycka till !!
önskar Katarina