

Tentamen TMV036 Analys och linjär algebra K, Kf, Bt, del B

Telefonvakt: Jakob Hultgren, telefon 0703-088304
Inga hjälpmedel. Kalkylator ej tillåten.

Plats och tid: V, e.m.

Skriv väl, motivera och förklara vad du gör.

Betygsgränser: 20-29 p. ger betyget 3, 30-39 p. ger betyget 4 och 40 p. eller mer ger betyget 5. Maxpoäng är 50.

Lösningar kommer att läggas ut på kurshemsidan första arbetsdagen efter tentamens-tillfället. Resultat meddelas via epost från LADOK.

L Ö S N I N G A R

1 Låt $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ -1 & -4 & 3 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ p \end{bmatrix}$ där p är ett reellt tal.

- (a) Bestäm p så att ekvationssystemet $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ är lösbart. (4p)
 - (b) Ange en vektor som *inte* kan skrivas som en linjärkombination av kolonnvektorerna i $\mathbf{A}$. Motivera ditt svar. (3p)
 - (c) Bestäm nollrummet till $\mathbf{A}$. Vilken rang har $\mathbf{A}$? (4p)
-

- (a) Radreducera den utökade matrisen

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 2 & 6 & -3 & -2 \\ -1 & -4 & -3 & p \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & -2 & 3 & 2+p \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -4+p \end{array} \right] \sim$$

dvs $-4 + p = 0$, och alltså $p = 4$.

- (b) Tex $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ eftersom ekvationssystemet i $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ ej är lösbart.

- (c) Alla lösningar till $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & -3 & 0 \\ -1 & -4 & -3 & 0 \end{array} \right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

$$x_3 \text{ fri, låt } x_3 = t, \text{ vi får } \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ Dvs } \text{Nul}(\mathbf{A}) = \text{Span} \left[\begin{bmatrix} -3 \\ 3/2 \\ 1 \end{bmatrix} \right].$$

Rangen är 2.

- 2 (a) Beräkna en approximation till integralen $\int_0^1 \tan \sqrt{x} \, dx$ Använd höger rektangelregel med steglängden $h = 0.5$. Blir approximationen större eller mindre än det exakta värdet? (motivera ditt svar) (4p)

(b) Beräkna integralen $\int_1^\infty \frac{2x}{1+x^4} dx$ (4p)

(a) Höger rektangelregel: $S = 0.5(\tan(\sqrt{0.5}) + \tan(1))$. $S > \int_0^1 \tan(\sqrt{x}) dx$ eftersom integranden växer på intervallet.

(b) $\lim_{K \leftarrow \infty} \int_1^K \frac{2x}{1+x^4} dx = \left[\begin{array}{l} t = x^2 \\ dt = 2x dx \end{array} \right] = \lim_{K \leftarrow \infty} \int_1^K \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_1^\infty = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}$

3 (a) Låt (4p)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ e^\mu & e^{-\mu} \end{bmatrix}$$

där $\mu \in \mathbb{R}$. För vilka värden på μ är $\mathbf{A}$ inverterbar? (Visa ditt svar)

(b) Låt $\mu \neq 0 \in \mathbb{R}$, $y_1 \neq 0 \in \mathbb{R}$ och bestäm lösningen till begynnelsevärdesproblemet (5p)

$$\begin{cases} y''(x) + \mu^2 y(x) = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = y_1 \end{cases}$$

(c) Låt $\mu \neq 0$ Bestäm en partikulärlösning till (4p)

$$y''(x) - \mu^2 y(x) = x^2$$

Verifiera även ditt svar genom att kontrollräkna din lösning. Redovisa även kontrollräkningen.

(d) Klassificera differentialekvationerna i (b) och (c), för var och en ange om de är homogena, linjära. Ange också ordning. (1p)

(a) För alla $\mu \neq 0$ ty $\det(\mathbf{A}) = e^{-\mu} - e^\mu = \frac{1 - e^{2\mu}}{e^\mu} \neq 0$ om $\mu \neq 0$

(b) Karakteristisk ekvation blir $r^2 + \mu^2 = 0$ med lösningar $r_{1,2} = \pm \mu i$. Vi får den allmänna lösningen

$$y(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x)$$

Begynnelsevillkoret $y(0) = 0 \Rightarrow A = 0$ och därmed $y'(x) = \mu B \cos(\mu x)$.

$$y'(0) = y_1 \Rightarrow B = \frac{y_1}{\mu}. \text{ Svar: } y(x) = \frac{y_1}{\mu} \sin(\mu x)$$

(c) Polynomreceptet, ansätt $y_p = Ax^2 + Bx + C$, dvs $y_p' = 2Ax + B$, $y_p'' = 2A$. Vi får $y_p'' - \mu^2 y_p = 2A - \mu^2(Ax^2 + Bx + C) = -x^2(A\mu^2) - x(B\mu^2) + (2A - \mu^2 C) = x^2$, dvs $A = -\frac{1}{\mu^2}$, $B = 0$ och $C = -\frac{2}{\mu^4}$. Svar: $y_p = -\frac{1}{\mu^2}x^2 - \frac{2}{\mu^4}$.

$$\text{Kontroll: } y_p = -\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{2}{\mu^4}, y_p' = -\frac{2x}{\mu^2}, y_p'' = -\frac{2}{\mu^2}$$

$$y_p'' - \mu^2 y_p = -\frac{2}{\mu^2} - \mu^2 \left(-\frac{x^2}{\mu^2} - \frac{2}{\mu^4} \right) = -\frac{2}{\mu^2} + x^2 + \frac{2}{\mu^2} = x^2$$

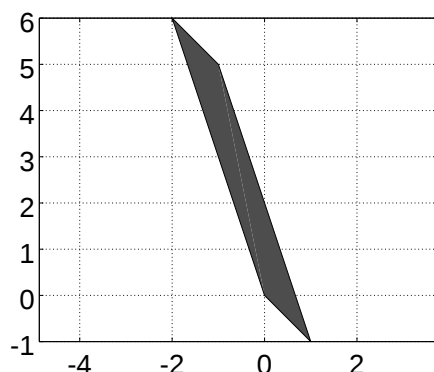
(d) Bägge är linjära, bägge har ordning 2, (b) är homogen, (c) är inhomogen.

4 Låt $\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 + 1 \\ x_1 - x_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{T}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ vara två avbildningar.

(a) Avgör vilka av avbildningarna ovan som är linjära. Motivera ditt svar. (4p)

- (b) Man har använt avbildningen $\mathbf{T}$ ovan för att beräkna bilden av en rektangel (4p)
med höjden 2 och bredden 1, och med ett hörn i origo. Rita bilden och beräkna
dess area.
-

- (a) Låt $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$ och $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. $\mathbf{S}$ är inte linjär ty
 $\mathbf{S}(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \begin{bmatrix} (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + 1 \\ (a_1 + b_1) - (a_2 + b_2) \end{bmatrix} \neq \mathbf{S}(\mathbf{a}) + \mathbf{S}(\mathbf{b})$. $\mathbf{T}$ däremot är linjär
ty matris-vektor produkt uppfyller linjäritetsvillkoren.
- (b)



Arean är $2 * \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}\right) = 2 * 2 = 4$

5 Låt $I_n = e^{-1} \int_0^1 e^x x^n dx$, $n = 0, 1, 2, \dots$

- (a) Visa att $I_0 = 1 - e^{-1}$ (2p)

- (b) Visa att integralvärdena (4p)

$$I_n = e^{-1} \int_0^1 e^x x^n dx$$

kan beräknas med hjälp av rekursionsformeln

$$I_{n+1} = 1 - (n+1)I_n$$

- (c) Man har använt följande matlabsekvens för att beräkna $I_0, I_1, I_2, \dots$ (3p)
(Obs $1 - e^{-1} \approx 0.6321$)

```
I = 0.6321
for n=0:7
    I = 1 - (n+1)*I
end
```

När man kör sekvensen ovan får man följande utskrifter

```
I = 0.6321
I = 0.3679
I = 0.2642
I = 0.2074
I = 0.1704
I = 0.1480
```

$$I = 0.1120$$

$$I = 0.2160$$

$$I = -0.7280$$

Visa att värdet på I_7 inte är rimligt.

$$(a) \quad I_0 = e^{-1} \int_0^1 e^x x^0 dx = e^{-1} \int_0^1 e^x dx = e^{-1} [e^x]_0^1 = e^{-1}(e^1 - e^0) = 1 - e^{-1}$$

$$(b) \quad I_{n+1} = e^{-1} \int_0^1 e^x x^{n+1} dx = [\text{P.I.}] = e^{-1}([e^x x^{n+1}]_0^1 - (n+1) \int_0^1 e^x x^n dx) = e^{-1}(e^1 - (n+1) \int_0^1 e^x x^n dx) = 1 - (n+1)I_n$$

(c) Eftersom det, på intervallet $[0, 1]$ gäller för integranderna att $e^x x^n > e^x x^{n+1}$ har vi att $I_n > I_{n+1}$ för $n = 0, 1, 2 \dots$. I utskriften är $I_6 < I_7$, vilket alltså är fel.

Lycka till !!
önskar Katarina