

Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast måndagen den 2 februari, i samband med föreläsningen.

### Ordinarie uppgifter

1. Skärningen av ytorna

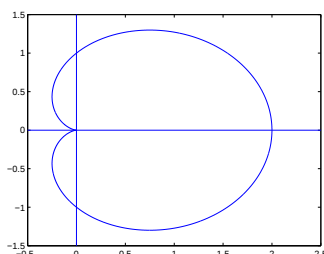
$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

och

$$\frac{(3x - z)^2}{9} + 2y = 1$$

bildar en kurva  $\mathbf{f}(t)$ . Parametrisera denna i variabeln  $t$  så att

- (a)  $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}'(t) = (1, 1, 0)$ ;
  - (b)  $\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}''(t) = (0, -2, 1)$ ;
  - (c)  $\mathbf{v}(t) = (-3, 3, 0)$ ;
  - (d)  $\mathbf{v}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ .
2. Pascals snäcka visas på bilden nedan och dess radie ges av  $r = 1 + \cos \theta$ . Eftersom  $x, y$  beror av  $r, \theta$  enligt  $x = r \cos \theta$  och  $y = r \sin \theta$  får vi en parametrering av snäckan i  $\theta$ , lämpligen med  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Antag att snäckan tillverkas av en ståltråd med densitet (vikt per längdenhet)  $1 + \sqrt{r}$ . Hur lång ståltråd behövs och vad väger den?



3. Ge en bas för rummet bestående av vektorerna i  $\mathbb{R}^4$  som är vinkelräta mot vektorn  $(5, 3, 2, 1)$ .
4. Antag att vektorn  $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)^T$  är skriven i basen som ges av egenvektorerna till matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 8 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & -7 & 0 \\ 9 & 9 & -7 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ordningen på vektorerna ges av att egenvärdena sorterats i fallande storleksordning (störst först). Vad blir  $B\mathbf{v}$  i denna bas? Går  $B$  att diagonalisera?

5. (a) Visa att om samtliga radsummor till matrisen  $A$  är lika, så har  $A$  egenvektorn  $(1, 1, \dots, 1)^T$ . Vilket egenvärde har denna egenvektor?

- (b) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Lös differentialekvationen  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , där

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -3 \\ 1 & 4 & -3 \\ 4 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

och  $\mathbf{x}(0) = (2, 3, 4)^T$ .

7. Betrakta differentialekvationen  $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$ , med begynnelsevärden  $y(0) = 0, y'(0) = 1$ . Den kan skrivas om som ett system av första ordningens differentialekvationer,  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$  genom att sätta  $x_1 = y$  och  $x_2 = y'$  och sedan bestämma  $A$ . Gör det, och lös på så sätt differentialekvationen.

8. (a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 7 \\ -6 & -4 & 7 \\ 7 & 7 & -17 \end{pmatrix}.$$

ortogonalt, det vill säga  $P$  ska väljas sådan att  $P^{-1} = P^T$ .

- (b) Beräkna  $A^{42}$ . Svaret får innehålla exponenter av tal, men inte exponenter av matriser.

### Bonusproblem (inget samarbete)

9. Mängden av polynom av grad 3 i en variabel,  $p_3(x)$ , bildar ett vektorrum. Visa det! Den som så önskar får utnyttja att mängden av alla polynom i en variabel bildar ett vektorrum.
10. Funktionen  $e^x$  kan skrivas (MacLaurinutveckling)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

där  $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$ . Använd denna formel för att ge ett enkelt uttryck för  $e^A$ , där  $A$  är en diagonaliserbar matris.

11. Karakteristiska ekvationen till en differentialekvation  $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$  skrivs  $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$ . Visa att om vi omvandlar differentialekvationen till ett system av första ordningens differentialekvationer, så kommer koefficientmatrisens karakteristiska ekvation vara samma som differentialekvationens, nämligen  $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$ .
12. Antag att de reella matriserna  $A$  och  $B$  går att diagonalisera ortogonalt och att  $AB = BA$ . Visa att  $AB$  och  $BA$  båda går att diagonalisera ortogonalt.