

Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast måndagen den 2 februari, i samband med föreläsningen.

Ordinarie uppgifter

1. Skärningen av ytorna

$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$

och

$$\frac{(3x - z)^2}{9} + 2y = 1$$

bildar en kurva $\mathbf{f}(t)$. Parametrisera denna i variabeln t så att

- (a) $\mathbf{v}(t) = \mathbf{f}'(t) = (1, 1, 0)$;
 - (b) $\mathbf{a}(t) = \mathbf{f}''(t) = (0, -2, 1)$;
 - (c) $\mathbf{v}(t) = (-3, 3, 0)$;
 - (d) $\mathbf{v}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
2. Pascals snäcka visas på bilden nedan och dess radie ges av $r = 1 + \cos \theta$. Eftersom x, y beror av r, θ enligt $x = r \cos \theta$ och $y = r \sin \theta$ får vi en parametrisering av snäckan i θ , lämpligen med $-\pi \leq \theta \leq \pi$. Antag att snäckan tillverkas av en ståltråd med densitet (vikt per längdenhet) $1 + \sqrt{r}$. Hur lång ståltråd behövs och vad väger den?



3. Ge en bas för rummet bestående av vektorerna i $\mathbb{R}^4$ som är vinkelräta mot vektorn $(9, 3, 1, 3)$.
4. Antag att vektorn $\mathbf{v} = (1, 2, 3, 4)^T$ är skriven i basen som ges av egenvektorerna till matrisen

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 & 0 \\ 7 & 2 & 7 & 0 \\ -7 & -6 & -2 & 9 \end{pmatrix}.$$

Ordningen på vektorerna ges av att egenvärdena sorterats i fallande storleksordning (störst först). Vad blir $B\mathbf{v}$ i denna bas? Går B att diagonalisera?

5. (a) Visa att om samtliga radsummor till matrisen A är lika, så har A egenvektorn $(1, 1, \dots, 1)^T$. Vilket egenvärde har denna egenvektor?

- (b) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Lös differentialekvationen $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -5 \\ -1 & 1 & -5 \\ 2 & -4 & -3 \end{pmatrix}$$

och $\mathbf{x}(0) = (2, 3, 4)^T$.

7. Betrakta differentialekvationen $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$, med begynnelsevärden $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Den kan skrivas om som ett system av första ordningens differentialekvationer, $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ genom att sätta $x_1 = y$ och $x_2 = y'$ och sedan bestämma A . Gör det, och lös på så sätt differentialekvationen.

8. (a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & -8 \\ 6 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & 26 \end{pmatrix}.$$

ortogonalt, det vill säga P ska väljas sådan att $P^{-1} = P^T$.

- (b) Beräkna A^{42} . Svaret får innehålla exponenter av tal, men inte exponenter av matriser.

Bonusproblem (inget samarbete)

9. Mängden av polynom av grad 3 i en variabel, $p_3(x)$, bildar ett vektorrum. Visa det! Den som så önskar får utnyttja att mängden av alla polynom i en variabel bildar ett vektorrum.
10. Funktionen e^x kan skrivas (MacLaurinutveckling)

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

där $n! = n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$. Använd denna formel för att ge ett enkelt uttryck för e^A , där A är en diagonaliserbar matris.

11. Karakteristiska ekvationen till en differentialekvation $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ skrivs $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$. Visa att om vi omvandlar differentialekvationen till ett system av första ordningens differentialekvationer, så kommer koefficientmatrisens karakteristiska ekvation vara samma som differentialekvationens, nämligen $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$.
12. Antag att de reella matriserna A och B går att diagonalisera ortogonalt och att $AB = BA$. Visa att AB och BA båda går att diagonalisera ortogonalt.