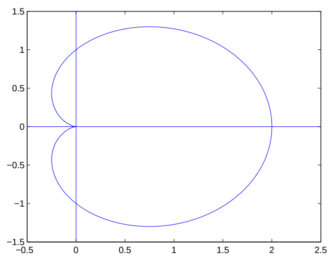
Alla svar ska ges med fullständiga och välmotiverade lösningar. Ange vilka ni samarbetat med. Lämnas in senast måndagen den 2 februari, i samband med föreläsningen.

Ordinarie uppgifter

1. Skärningen av ytorna
$$x^2 + \frac{z^2}{9} = 1$$
och
$$\frac{(3x-z)^2}{9} + 2y = 1$$
bildar en kurva $\boldsymbol{f}(t)$. Parametrisera denna i variabeln t så att
   (a) $\boldsymbol{v}(t) = \boldsymbol{f}'(t) = (1, 1, 0)$;
   (b) $\boldsymbol{a}(t) = \boldsymbol{f}''(t) = (0, -2, 1)$;
   (c) $\boldsymbol{v}(t) = (-3, 3, 0)$;
   (d) $\boldsymbol{v}(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

2. Pascals snäcka visas på bilden nedan och dess radie ges av $r = 1 + \cos\theta$. Eftersom x, y beror av r, θ enligt $x = r\cos\theta$ och $y = r\sin\theta$ får vi en parametrisering av snäckan i θ, lämpligen med $-\pi \le \theta \le \pi$. Antag att snäckan tillverkas av en ståltråd med densitet (vikt per längdenhet) $1 + \sqrt{r}$. Hur lång ståltråd behövs och vad väger den?



3. Ge en bas för rummet bestående av vektorerna i $\mathbb{R}^4$ som är vinkelräta mot vektorn $(9, 5, 1, 9)$.

4. Antag att vektorn $\boldsymbol{v} = (1, 2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$ är skriven i basen som ges av egenvektorerna till matrisen
$$B = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -7 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \\ -5 & -2 & -8 & -2 \end{pmatrix}.$$
Ordningen på vektorerna ges av att egenvärdena sorterats i fallande storleksordning (störst först). Vad blir $B\boldsymbol{v}$ i denna bas? Går B att diagonalisera?

5. (a) Visa att om samtliga radsummor till matrisen A är lika, så har A egenvektorn $(1, 1, \ldots, 1)^{\mathrm{T}}$. Vilket egenvärde har denna egenvektor?

(b) Beräkna samtliga egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 2 \\ 0 & -3 & -4 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

6. Lös differentialekvationen $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$, där

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -5 \\ -2 & 4 & -5 \\ -4 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

och $\boldsymbol{x}(0) = (2, 3, 4)^{\mathrm{T}}$.

7. Betrakta differentialekvationen $y''(t) + 5y'(t) + 6y(t) = 0$, med begynnelsevärden $y(0) = 0, y'(0) = 1$. Den kan skrivas om som ett system av första ordningens differentialekvationer, $\boldsymbol{x}' = A\boldsymbol{x}$ genom att sätta $x_1 = y$ och $x_2 = y'$ och sedan bestämma A. Gör det, och lös på så sätt differentialekvationen.

8. (a) Diagonalisera matrisen

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 6 \\ 2 & -1 & 12 \\ 6 & 12 & 24 \end{pmatrix}.$$

ortogonalt, det vill säga P ska väljas sådan att $P^{-1} = P^{\mathrm{T}}$.

(b) Beräkna A^{42}. Svaret får innehålla exponenter av tal, men inte exponenter av matriser.

Bonusproblem (inget samarbete)

9. Mängden av polynom av grad 3 i en variabel, $p_3(x)$, bildar ett vektorrum. Visa det! Den som så önskar får utnyttja att mängden av alla polynom i en variabel bildar ett vektorrum.

10. Funktionen e^x kan skrivas (MacLaurinutveckling)

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots,$$

där $n! = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$. Använd denna formel för att ge ett enkelt uttryck för e^A, där A är en diagonaliserbar matris.

11. Karakterisktiska ekvationen till en differentialekvation $ay''' + by'' + cy' + dy = 0$ skrivs $ar^3 + br^2 + cr + d = 0$. Visa att om vi omvandlar differentialekvationen till ett system av första ordningens differentialekvationer, så kommer koefficientmatrisens karakteristiska ekvation vara samma som differentialekvationens, nämligen $a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d = 0$.

12. Antag att de reella matriserna A och B går att diagonalisera ortogonalt och att $AB = BA$. Visa att AB och BA båda går att diagonalisera ortogonalt.