

Kurvor och ytor i $\mathbb{R}^2$ och $\mathbb{R}^3$.

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt 10

1 Kurvor i $\mathbb{R}^2$

MATLAB kan som bekant användas för att plotta kurvor i planet. Mest har detta skett genom att ni plottat en funktionsgraf, $y = f(x)$.

```
>> x=0:0.05:2;  
>> y=x.^2;  
>> plot(x,y)
```

En funktionsgraf är ett specialfall av den allmänna kurvan $g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, där $I \subset \mathbb{R}$, som för detta exempel skulle bli $g(t) = (t, t^2)$. I MATLAB ser det nästan likadant ut.

```
>> t=0:0.05:2;  
>> plot(t,t.^2)
```

Den viktiga skillnaden är att första koordinaten i `plot` nu kan vara en godtycklig funktion i den variabel vi använder.

Övning 1. Plotta följande kurvor

a) Asteroiden

$$g(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t)), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

b) Cykliden

$$g(t) = (t - \sin(t), 1 - \cos(t)), \quad 0 \leq t \leq 10\pi$$

Kurvan beskriver den väg en myra, som fastnat på ett hjul, färdas när hjulet rullar framåt. Kurvan ser snyggast ut om man anropar `axis equal`.

c) Kardoiden eller Pascals snäcka som, i polära koordinater, definieras genom

$$r(\theta) = 1 - \cos(\theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

där

$$x = r \cos(\theta) \quad \text{och} \quad y = r \sin(\theta).$$

Polära koordinater innebär att vi istället för vanliga kartesiska koordinater x och y anger avståndet till origo, *radien* r , och vinkeln mot x -axeln, θ . Varje punkt $(x, y) \neq (0, 0)$ svarar då mot en unik punkt (r, θ) , om vi sätter $r \geq 0$ och $0 \leq \theta < 2\pi$.

Prova också att använda Matlabs kommando `polar`, i detta fall med `polar(t, 1 - cos(t))`.

2 Kurvor i $\mathbb{R}^3$

En kurva i rummet definieras som $g : I \rightarrow \mathbb{R}^3$. Antag att

$$g(t) = (\sqrt{t} \cos(\pi t), \sqrt{t} \sin(\pi t), t), \quad 0 \leq t \leq 4.$$

. För att plotta denna kurva använder vi kommandot `plot3`:

```
>> t=0:0.05:4;
>> plot3(sqrt(t).*cos(pi*t),sqrt(t).*sin(pi*t),t)
```

Övning 2. Plotta följande kurvor.

a) $g(t) = (\cos(t), \sin(t), t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$

b) $g(t) = (\cos^3(t), \sin^3(t), \sqrt{t}), \quad 0 \leq t \leq 4\pi.$

3 Ytor

En yta skriver vi som $g : Q \rightarrow \mathbb{R}^3$, där $Q \subset \mathbb{R}^2$. Ofta beskriver vi en yta som grafen till en funktion $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$, vi har då $g(x, y) = (x, y, f(x, y))$.

För att plotta ytor i MATLAB så börjar vi med att skapa (*koordinat*)*matriser* **X** och **Y** som innehåller alla punkter (x_i, y_j) där vi vill beräkna vår funktion.

Antag att vi vill plotta funktionen

$$f(x, y) = x(x^2 + y^2)^{1/2}$$

över området

$$-1 \leq x \leq 2, \quad 0 \leq y \leq 3$$

Vi genererar då först koordinatmatriserna med hjälp av kommandot `meshgrid`:

```
>> x = -1:1:2;
>> y = 0:1:3;
>> [X,Y] = meshgrid(x,y);    % X innehåller alla x_{ij}
                                % Y innehåller alla y_{ij}
```

Vi kan sedan skapa en matris **Z** med motsvarande funktionsvärden.

```
>> fun = @(x,y) x.*sqrt((x.^2 + y.^2));
    % Vi skapar funktionen f som en anonym funktion i två variabler.
```

```
>> Z = fun(X,Y);    % Vi beräknar f i samtliga gitterpunkter (x_i, y_j)
```

Slutligen, för att plotta ytan, skriver vi

```
>> surf(X,Y,Z)      % Alt. >> mesh(X,Y,Z)
```

Notera att genom att låta i och j variera så bildar

$$[X(j, i), Y(i, j)] = (x_i, y_j)$$

ett gitter av punkter i rektangeln $-1 \leq x \leq 3, \quad 0 \leq y \leq 3$. Om man har med för många punkter i gittret (dvs. om matriserna **X** och **Y** är för stora) så riskerar man att beräkningarna tar lång tid för MATLAB att utföra.

Övning 3. Plotta de ytor som är grafer till nedanstående funktioner med `surf`:

- a) $f(x,y) = x + 2y - 2, \quad (x,y) \in [1,2] \times [3,4]$
- b) $f(x,y) = x^2 - y^2, \quad (x,y) \in [-2,2] \times [-2,2]$
- c) $f(x,y) = (1 - y^2)^{1/2}, \quad (x,y) \in [0,3] \times [-1,1]$
- d) $f(x,y) = (9 - x^2 - y^2)^{1/2}, \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 9\}$
- e) $f(x,y) = ye^{-\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \in \{(x,y) : x^2 + y^2 \leq 4\}$

Tips: I d) och e) kan du med fördel använda polära koordinater. Börja med att skapa två lämpliga vektorer $\mathbf{r}$ och $\boldsymbol{\theta}$ och därefter (med `meshgrid`) två motsvarande matriser R och T . Sedan kan du beräkna $\mathbf{X} = R.*\cos(T)$ och $\mathbf{Y} = R.*\sin(T)$. Prova att ge kommandona

```
>> subplot(1,2,1)
>> mesh(X,Y,zeros(size(X)))
>> view(2)
>> subplot(1,2,2)
>> mesh(R,T,zeros(size(X)))    % size(R) = size(X)!
>> view(2)
```

Vad ser du? Förklara!

Nu när du har beräknat X och Y kan du fortsätta på samma sätt som förut.

Övning 4. Återskapa figur 12.3 i Adams. Dvs plotta grafen för funktionen

$$f(x,y) = -6x/(2 + x^2 + y^2)$$

över ett lämpligt område. Gör detta för både rektangulära cirkulära områden.

4 Nivåkurvor

Istället för att rita upp ytan är det ibland bättre att visualisera en funktion genom en kon-
turplot, det vill säga vi ritar tvådimensionella nivåkurvor i planet.

Lösningsmängden till ekvationen $f(x,y) = c$, där c är en konstant, beskriver en (*nivå*)kurva i xy -planet. Genom att rita ut flera sådana kurvor för olika värden på c erhåller man en tvådimensionell (topografisk) karta, med vilken man kan utläsa funktionsytans utseende. Till exempel använder vanliga orienteringskartor detta sätt för att beskriva olika höjder i naturen. Tekniken används också för bland annat väderkartor, där isobarer och isotermer är nivåkurvor för de funktioner som beskriver lufttryck respektive temperatur.

För att skapa en nivåkurva i MATLAB så använder vi kommandot `contour`:

```
>> contour(X,Y,Z,v)
```

där $\mathbf{v}$ är en vektor som innehåller värdena på de nivåer vi vill rita. (Man kan också utelämna detta argument och låta MATLAB bestämma.) Det är också möjligt att plotta både yta och nivåkurvor i samma graf med kommandot `surf` eller `meshc`:

```
>> surfc(X,Y,Z)           % Alt. meshc(X,Y,Z)
```

Övning 5. Rita nivåkurvor till funktionerna i Övning 3.

Övning 6. Betrakta funktionen

$$f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x + y^2 - 15y.$$

Plotta ytan över ett lämpligt område samt skapa en konturplot. Rita några enstaka nivåkurvor. (Titta i Matlabs hjälp `help contour` för att ta reda på hur man ska rita en enstaka nivåkurva.)

Övning 7. Låt

$$f(x,y) = x \sin y + y \cos x - xy.$$

Nivåkurvan $f(x,y) = 0$ delar in xy -planet i ett antal områden. Förklara varför funktionen $f(x,y)$ inte växlar tecken inom var och en av områdena. I vilka av områdena är $f(x,y) > 0$?

Tips: Plotta nivåkurvorna $f(x,y) = c$ för $c = 0, -0.2$ respektive 0.2