

Linjära system av differentialekvationer

Analys och Linjär Algebra, del C, K1/Kf1/Bt1, vt10

1 Inledning

Tidigare har vi studerat allmänna system av differentialekvationer med begynnelsevillkor:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)), & a \leq t \leq b \\ \mathbf{x}(a) &= \mathbf{x}_a.\end{aligned}\tag{1}$$

Vi har också lärt oss att lösa dem i MATLAB med t.ex `ode45` eller den egna odelösaren `myode`. I det här avsnittet kommer vi att studera allmänna *linjära system* av differentialekvationer:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & a \leq t \leq b \\ \mathbf{x}(a) &= \mathbf{x}_a.\end{aligned}\tag{2}$$

där $\mathbf{A}$ är en kvadratisk matris ($n \times n$). Sambandet mellan $\mathbf{f}$ och matrisen $\mathbf{A}$ ges av:

$$\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Det är enkelt att lösa system (2) i MATLAB (skapa funktionen $\mathbf{f}$ som t.ex en anonym funktion:

```
>> f = @(t,x) A*x % f beror av variablerna t och x
```

och utnyttja sedan `ode45`)

Till skillnad från de flesta icke linjära system så kan vi lösa de linjära analytiskt (dvs exakt) med *egenvärdesmetoden*, (se kapitel 5 i Lay).

2 Riktningsfält och fasporträtt

För att få en lite bättre uppfattning av vilka egenskaper systemet (2) har så skall vi titta närmare på högerledet: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Funktionen $\mathbf{F}$ är exempel på en vektorvärd funktion och kallas *vektorfält* (dessa kommer att studeras mer i slutet av kursen).

För varje initialvärde till (2) så har vi en (okänd) lösning $\mathbf{x}(t)$. Genom att betrakta derivatan som en differenskvot så vet vi sedan tidigare att (differens-)vektorn

$$\Delta \mathbf{x} = \mathbf{x}(t+h) - \mathbf{x}(t) \approx h\mathbf{F}(\mathbf{x})$$

Dvs vektorfältet $\mathbf{F}$ ger oss i varje punkt $\mathbf{x}$ den riktning i vilken lösningen förändras och dess längd förändringstakten. Genom att i ett lämpligt antal punkter $\mathbf{x}$ markera styrka och riktning för vektorn $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ med en pil så får vi ett så kallat *riktningsfält*.

Genom att plotta detta vektorfält får vi ungefärlig information om hur lösningen $\mathbf{x}(t)$ till ekvationen beter sig för samtliga möjliga startvärden. Vi kan alltså skapa kurvan $\mathbf{x}(t)$ genom att sätta pennan på den startpunkt vi önskar och sedan följa pilarna.

För att plotta vektorfält i planet använder vi kommandot `quiver`. Men först måste vi skapa ett gitter (grid) med de punkter i vilka vi vill sätta ut pilar (som beskriver vektorfältets storlek och riktning i respektive punkt).

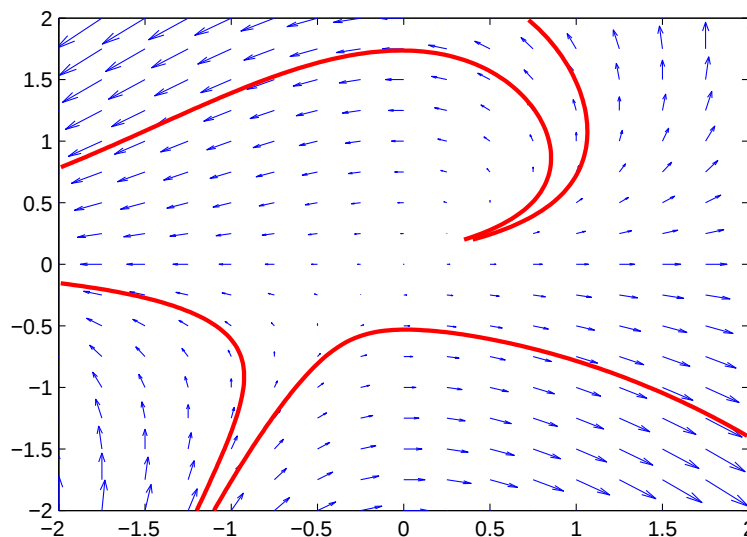
$\mathbf{F}(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, x_1 x_2)$ kan vi t.ex. plotta med kommandona

```
>> x1 = -2:.3:2;
>> x2 = -2:.3:2;
>> [X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
>> quiver(X1,X2,X1 - X2, X1.*X2,1.2) % 1.2 är en skalfaktor som förlänger pilarna.
>> axis[-2 2 -2 2]
```

Vi kan också lägga till några strömlinjer (banor) med kommandot `streamline`:

```
>> s1 = [-1.2 -1.1 0.35 0.4]; % Första-koordinater för fyra startpunkter
>> s2 = [-2 -2 0.2 0.2];      % Andra-koordinater för fyra startpunkter
>> streamline(X1,X2,X1 - X2, X1.*X2,s1,s2)
```

Nu erhålls figuren



Figur 1: Pilarnas riktning visar fältets riktning.

Ytterligare ett exempel hämtar vi från kursboken i Linjär Algebra (Lay, Exempel 2, kap 5.7): Vi löser $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ $t \geq 0$, då

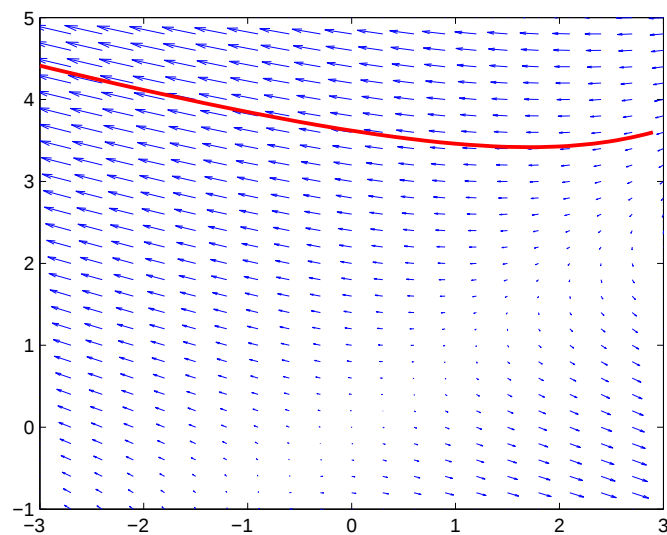
$$A = \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2.9 \\ 2.6 \end{bmatrix}$$

En (numerisk) lösning erhåller vi enligt följande:

```
>> A=[4 -5;-2 1]; x0=[2.9;3.6];
>> F = @(t,x) A*x;
>> [t,x]=ode45(F,[0 10], x0);
```

Tidigare har vi främst ritat ut graferna för koordinatfunktionerna $x_1(t)$ och $x_2(t)$, men det är också naturligt att visualisera lösningen i ett så kallat *fasporträtt* där vi plottar $x_1(t)$ mot $x_2(t)$. Det blir extra intressant att rita in en sådan kurva (bana) i ett riktningsfält:

```
>> x1 = -3:.3:3; x2 = -1:0.2:5;
>> [X1,X2] = meshgrid(x1,x2);
>> F1=A(1,1)*X1+A(1,2)*X2;
>> F2=A(2,1)*X1+A(2,2)*X2;
>> quiver(X1,X2,F1,F2,1.2)
>> axis[-3 3 -1 5], hold on
>> plot(x(:,1),x(:,2),'r', 'LineWidth',2)
```



Figur 2: Lösningen $\mathbf{x}(t)$ följer fältets riktning.

Övning 1. Betrakta begynnelsevärdesproblemet:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}'(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t), & 0 \leq t \leq T \\ \mathbf{x}(0) &= \mathbf{x}_0.\end{aligned}\tag{3}$$

Plotta riktningsfält och fasporträtt då

$$\text{a) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \end{bmatrix}, \quad T = 5.$$

$$\text{b) } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ -12 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad T = 6.$$

3 Egenvärdesmetoden

Här behandlas begynnelsevärdesproblemet (3) som ett egenvärdesproblem.

Antag att $\mathbf{A}$ är en diagonaliserbar 2×2 -matris med en bas av egenvektorer $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ och med tillhörande egenvärden λ_1 respektive λ_2 . Då ges lösningen av formeln (Lay kap. 5.5)

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t},$$

där koefficienterna c_1 och c_2 bestäms av startvärdena. Vi sätter $t = 0$ och erhåller

$$\mathbf{x}(0) = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

Detta visar att

$$\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{x}_0, \quad (\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0),$$

där matrisen $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}$ (kolonnerna är egenvektorerna till matrisen $\mathbf{A}$).

Övning 2. Undersök system $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ för matriserna $\mathbf{A}$ nedan. Rita i samma graf egenvektorerna till $\mathbf{A}$ och jämför riktningsfältets egenskaper med egenvektorerna och motsvarande egenvärden. Förklara sambandet mellan riktningsfältet och matrisens egenvärden och egenvektorer. När utgör origo en **källa** (alla lösningar strömmar från origo), en **sänka** (alla lösningar strömmar till origo), en **sadelpunkt** (lösningarna går mot origo men avviker sedan) eller en **spiralpunkt** (lösningarna går i spiral kring origo)?

Den som inte orkar beräkna alla egenvärden och egenvektorer för hand kan använda kommandot `eig` som gör detta. Anropar man med `[V, D] = eig(A)` hamnar egenvärdena för matrisen $\mathbf{A}$ längs diagonalen i $\mathbf{D}$ och egenvektorerna blir kolonner i $\mathbf{V}$.

Rita också lösningen till diffekvationen för några startvärden som ni hittar på själva. Samla slutligen alla dessa utritningar i ett program som givet matrisen $\mathbf{A}$ och startpunkt $\mathbf{x}(0)$ ritat riktningsfält, egenvektorer och lösningen till diffekvationen för ett lagom långt intervall på t .

a) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$

b) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -9 & 1 \end{bmatrix}$

e) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -8 & 2 \end{bmatrix}$

4 En andra ordningens ODE

Betrakta nu följande andra ordningens ODE.

$$\begin{aligned}y''(t) + 2y'(t) + 17y(t) &= 0, \quad t \geq 0 \\ y(0) &= 0, y'(0) = 1.\end{aligned}$$

Övning 3. .

- a) Skriv om problemet som ett system av första ordningens ekvationer.

Det kan göras genom att sätta $x_1(t) = y(t)$ och $x_2(t) = y'(t)$ och sedan beräkna derivatan

$$\text{av } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}:$$

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$$

- b) Lös problemet för hand med egenvärdesmetoden och rita fasporträttet.
- c) Använd `myode` (från alaB) eller `ode45` för att lösa systemet och plotta fasporträttet.
- d) Genom att skriva en programsekvens som nedan, kan vi plotta fasporträtt för flera startvärden,

```
clf
axis([-5 5 -5 5])
hold on
A=[0 ?; ? ?];
f=@(t,x) A*x;
for i=-2:.5:2
    [t, W] = ode45(f, [0 4], [i;0]);
    plot(W(:,1), W(:,2),'Color',[rand rand rand],'LineWidth',2)
    % "rand" ger ett slumpstal mellan 0 och 1
    % tre tal sätter färgen (RGB)
    pause(0.1)
end
```

Vad kommer det sig att banorna inte korsar varandra?