Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv035C, Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
lösningar
2009-01-10

---

1. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & -\lambda & 4 \\ 0 & 2 & -2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)(-\lambda(-2-\lambda) - 8) \\ &= (3-\lambda)(\lambda^2 + 2\lambda - 8) \\ &= (3-\lambda)(\lambda+4)(\lambda-2). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -4$ och $\lambda_3 = 2$. Vi söker nu lösningar till ekvationerna $(A - \lambda_i I)\boldsymbol{v}_i = \mathbf{0}$ och får

$$A - 3I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_1 = (1, 0, 0)^T$. På samma sätt får vi

$$A + 4I = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_2 = (1, -7, 7)$ och

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

vilket ger $\boldsymbol{v}_3 = (-5, 2, 1)^T$.

2. Verifiera att

$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

är en ortogonal mängd, och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (3, 2, -4)^T$ på $U = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$.

Lösning: Eftersom $u_1 \cdot u_2 = -4 + 2 + 2 = 0$ är vektorerna ortogonala. Vid projektionen gäller att vi ska projicera på var och en av basvektorerna, det vill säga

$$\begin{aligned} \text{proj}_U \boldsymbol{x} &= \text{proj}_{\boldsymbol{u}_1} \boldsymbol{x} + \text{proj}_{\boldsymbol{u}_2} \boldsymbol{x} \\ &= \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_1}{\|\boldsymbol{u}_1\|^2} \boldsymbol{u}_1 + \frac{\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{u}_2}{\|\boldsymbol{u}_2\|^2} \boldsymbol{u}_2 \\ &= \frac{-12}{21}(-4, 2, 1)^T + \frac{-3}{6}(1, 1, 2)^T \\ &= \frac{1}{14}(25, -23, -22). \end{aligned}$$

Vi kan verifiera att lösningen är en projektion genom att kontrollera att $\boldsymbol{x} - \text{proj}_U \boldsymbol{x} = 17 * (1, 3, -2)/14$ är vinkelrät mot $\boldsymbol{u}_1$ och $\boldsymbol{u}_2$.

3. Ange tangentplanet till funktionen $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i punkten $(2, -2, 1)$ och ge sedan ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$.

Lösning: Tangentplanet i punkten $(a, b, f(a, b))$ ges av $z = f(a, b) + f_1'(a, b)(x - a) + f_2'(a, b)(y - b)$. Genom att derivera partiellt får vi $f_1'(x, y) = 2x \cos(x^2 - y^2) - \pi \sin(\pi x)$ och $f_2'(x, y) = -2y \cos(x^2 - y^2)$, och därmed $z = 1 + 4(x - 2) + 4(y + 2)$. Ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$ ges av planets värde i denna punkt, vilket är $z = 1 + 4 \cdot 0.1 + 4 \cdot 0.2 = 2.2$.

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y$ på rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$.

Lösning: I det inre av triangeln måste ett eventuellt extremvärde antas i punkter där $\nabla f = 0$. Vi får $0 = \nabla f = (y^2 - 2x, 2xy - 1)$, vilket ger

$x = y^2/2 \Rightarrow 1 = 2xy = y^3$, och därmed $(x, y) = (1/2, 1)$. Denna punkt ligger inuti det givna området och är således en kritisk punkt.

Vi delar upp randen i 4 delar, som ges av $x = 0$ respektive $x = 1$ för $0 \leq y \leq 2$, samt $y = 0$ respektive $y = 2$ för $0 \leq x \leq 1$. I första fallet får vi $g_1(y) = f(0, y) = -y$, som saknar extremvärden i det inre av $0 \leq y \leq 2$. Det andra fallet ger $g_2(y) = f(1, y) = y^2 - 1 - y$, vars derivata är $g_2'(y) = 2y-1$. Vi får $g_2'(y) = 0$ för $y = 1/2$, så $(1, 1/2)$ är en kritisk punkt. Vi har även $g_3(x) = f(x, 0) = -x^2$ utan extremvärden i intervallets inre och $g_4(x) = f(x, 2) = 4x - x^2 - 2$, med derivatan $g_4'(x) = 4 - 2x$, vars nollställe hamnar utanför $0 \leq x \leq 1$.

Kritiska punkter är således $(1/2, 1)$ och $(1, 1/2)$ samt hörnen. Beräknas värdet i dessa punkter får vi $f(1/2, 1) = -3/4$, $f(1, 1/2) = -5/4$, $f(0, 0) = 0$, $f(0, 2) = -2$, $f(1, 0) = -1$ samt $f(1, 2) = 1$. Störst är alltså 1 och minst -2.

5. Beräkna

$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A,$$

där D är området givet av $x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0$.

Lösning: Integralen löses genom

$$\begin{aligned}
\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A &= \int_{y=0}^{1} \int_{x=0}^{\sqrt{y}} \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2(1+y^2)}\right]_0^{\sqrt{y}} \mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{y}{(1+y^2)}\,\mathrm{d}y \\
&\quad \left\{t = y^2, \quad \mathrm{d}t = 2y\mathrm{d}y\right\} \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{4}\left[\ln(1+t)\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{4}.
\end{aligned}$$

6. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$. Beräkna

$$\iiint_K z\,\mathrm{d}V.$$

Lösning: Vi går över till sfäriska koordinater. I detta fall har vi $0 \leq \rho \leq 1$, $0 \leq \theta \leq \pi$ och $0 \leq \varphi \leq \pi/2$. Vi får

$$\begin{aligned}\iiint_K z\,\mathrm{d}V &= \int_{\rho=0}^{1}\int_{\theta=0}^{\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2} \rho\sin(\varphi)\rho^2\cos(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\rho \\ &= \int_{\rho=0}^{1}\rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_{\theta=0}^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\frac{\sin(2\varphi)}{2}\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \left[\frac{\rho^4}{4}\right]_0^1 \pi\left[\frac{-\cos(2\varphi)}{4}\right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi}{16}(1+1) = \frac{\pi}{8}.\end{aligned}$$

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (4xz, -y^2, yz)$ ut genom enhetskuben, det vill säga
$$\iint_S (4xz, -y^2, yz)\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$
där S begränsar området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$.

   Lösning: Vi använder Gauss sats och får
$$\begin{aligned}\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V \\ &= \int_0^1\int_0^1\int_0^1 (4z-2y+y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1\int_0^1 (4z-y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 4z\,\mathrm{d}z - \int_0^1 y\,\mathrm{d}y \\ &= 2 - 1/2 = 3/2.\end{aligned}$$

8. Bestäm största möjliga volym för en låda vars botten och sidor har sammanlagd area 3. Locket räknas alltså inte till arean. Lådans sidor förutsätts vara parallella med koordinatplanen (räta vinklar i lådan).

   Lösning: Om vi lägger ett av hörnen i bottenplattan i origo och det bortesta hörnet i (x,y,z) så ges volymen av $V(x,y,z) = xyz$ och arean av $A(x,y,z) = xy + 2xz + 2yz = 3$. Vi ska således maximera $V(x,y,z)$ under bivillkoret $A(x,y,z) - 3 = 0$ och tar till Lagrange.

   Låt
$$\begin{aligned}L(x,y,z,\lambda) &= V(x,y,z) + \lambda(A(x,y,z)-3) \\ &= xyz + \lambda(xy + 2xz + 2yz - 3).\end{aligned}$$

Sätter vi ∇L till noll får vi således ekvationerna

$$\begin{aligned} yz + \lambda y + 2\lambda z &= 0; \\ xz + \lambda x + 2\lambda z &= 0; \\ xy + 2\lambda x + 2\lambda y &= 0; \\ xy + 2xz + 2yz - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Den första minus den andra av dessa ger $(y - x)(z + \lambda) = 0$, vilket innebär att minst en av $y = x$ och $z = -\lambda$ är sann. Den senare likheten ger insatt i första ekvationen $2\lambda z = 0$ som inte är intressant, eftersom $z = 0$ ger att volymen är noll.

Vi antar således $x = y$. Den tredje ekvationen ger då $x^2 + 4x\lambda = 0$ och eftersom vi kan anta $x > 0$ får vi $x = y = -4\lambda$. Första ekvationen ger då genast $z = -2\lambda = x/2$. Allt insatt i sista ekvationen ger $48\lambda^2 = 3 \Rightarrow \lambda = \pm 1/4$. Genom att insistera på positiva koordinater får vi således $x = y = 1$, $z = 1/2$. Volymen blir då $1/2$.

9. Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till systemet

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0; \\ x_1 + x_2 &= 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$

Lösning: Betrakta problemet på matrisform $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. Minsta-kvadrat-lösningen ges då av lösningen till $A^T A\boldsymbol{x} = A^T\boldsymbol{b}$. Vi får

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & -6 \\ 4 & 3 & -3 \\ -6 & -3 & 6 \end{pmatrix}$$

och

$$A^T\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 12 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Gausselinimation av systemet $(A^T A | A^T\boldsymbol{b})$ ger nu

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 7 & 4 & -6 & 18 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ -6 & -3 & 6 & -9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -2 & 0 & -6 \\ 4 & 3 & -3 & 12 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right),$$

vilket ger $\boldsymbol{x}^T = (12, -3, 9)$.

10. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,\mathrm{d}x + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,\mathrm{d}y,$$

där Γ är den övre halvan av enhetscirkeln medurs från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$.

Lösning: Vi sluter kurvan med linjen σ given av $y = 0$ och x gående från 1 till -1. Sätter vi $P(x, y) = x^2 - y + 2\ln(1 + y)$ och $Q(x, y) = (1 + x)^2/(1 + y)$ gäller enligt Greens formel

$$\begin{aligned}\int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y &= \int_{\Gamma+\sigma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y - \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \\ &= -\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y - \int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

där D är övre halvan av enhetscirkelskivan. Minustecknet följer av att kurvan runt D har negativ orientering.

Vi har

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2(1+x)}{1+y}$$

och

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2}{1+y} - 1.$$

Således får vi

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(1 + \frac{2x}{1+y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \pi/2,$$

eftersom den första termen i integranden ger arean av området D och den senare är en udda funktion i x på ett symmetriskt intervall, vilket ger integralen 0.

Dessutom har vi

$$\int_\sigma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \int_{x=1}^{-1} x^2\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^{-1} = -\frac{2}{3}.$$

Sammanlagt blir kurvintegralen

$$-\frac{\pi}{2} - \left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{4 - 3\pi}{6}.$$