Institutionen för matematiska vetenskaper
Chalmers tekniska högskola
Niklas Eriksen

Tentamen i tmv036C och tmv035C,
Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt
Lösningar
2009-04-16

---

1. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

givet att $\boldsymbol{x}(0) = (1,4)^{\mathrm{T}}$.

Lösning: Egenvärdena beräknas genom

$$\begin{aligned} 0 = \det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} -\lambda & 2 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} \\ &= -\lambda(5-\lambda) + 6 \\ &= \lambda^2 - 5\lambda + 6 \\ &= (\lambda - 2)(\lambda - 3). \end{aligned}$$

Egenvärdena är således 2 och 3. Ekvationerna $(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0$ för dessa värden löses av $\boldsymbol{v}_1 = (1,1)^T$ och $\boldsymbol{v}_2 = (2,3)^T$.

Den generella lösningen blir då

$$\boldsymbol{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}.$$

För $t = 0$ fås

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

som löses av $c_1 = -5$ och $c_2 = 3$. Problemet löses alltså av

$$\boldsymbol{x}(t) = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{2t} + 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}.$$

2. Beräkna längden av kurvan $\boldsymbol{F}(t) = (\ln t, 2t, t^2)$ för $1 \leq t \leq \mathrm{e}$. Glöm inte kvadreringsregeln.

   Lösning: Båglängden kan beräknas av integralen

$$S = \int_t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t,$$

   där $(x, y, z) = \boldsymbol{F}(t) = (\ln t, 2t, t^2)$. Vi får

$$\begin{aligned} S &= \int_{t=1}^{\mathrm{e}} \sqrt{\frac{1}{t^2} + 4 + 4t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=1}^{\mathrm{e}} \sqrt{\left(\frac{1}{t} + 2t\right)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \int_{t=1}^{\mathrm{e}} \left(\frac{1}{t} + 2t\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[\ln t + t^2\right]_{t=1}^{\mathrm{e}} = 1 + \mathrm{e}^2 - 0 - 1 = \mathrm{e}^2. \end{aligned}$$

3. Ljudnivån stiger under tentan i Vågrörelselära och på din medhavda ljudmätare (på den tentan är alla hjälpmedel tillåtna) mäter du nivån till 80 dB. Genom att sträcka ut mätare en meter åt öster (höger) minskar ljudnivån med 2 dB och en meter norrut (framåt) minskar ljudnivån med 1,5 dB. I vilken riktning växer ljudnivån snabbast, hur snabbt växer ljudnivån i den riktningen och hur starkt är ljudet hos den person som sitter snett framför dig, två meter till vänster och sex meter framåt? I det senare fallet får du använda linjär approximation.

   Lösning: Om vi lägger x-axeln åt höger och y-axeln framåt får vi att ljudnivåns gradient är $\nabla f = (-2, -3/2)$. Ljudnivån växer alltså snabbast i just denna riktning, med farten $\|\nabla f\| = \sqrt{4 + 9/4} = 5/2$. I en punkt $(-2, 6)$ från din position kommer ljudnivån ges av $80 + (-2, -3/2) \cdot (-2, 6) = 80 + 4 - 9 = 75$.

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = 2x^2 - y^2$ på området givet av $y \geq x^2$ och $x \geq y^2$.

   Lösning: De två kurvorna $y = x^2$ och $x = y^2$ korsar varandra i lösningarna till båda dessa ekvationer. Vi får $y = x^2 = y^4$, vilket ger $0 = y^4 - y = y(y^3 - 1)$, som har de reella lösningarna $y = 0$ och $y = 1$. För dessa värden får vi $x = y^2 = 0$ och $x = y^2 = 1$.

I det inre av området måste ett eventuellt extremvärde antas i punkter där $\nabla f = \mathbf{0}$. Vi får $\mathbf{0} = \nabla f = (4x, -2y)$, vilket ger $x = y = 0$. Denna punkt ligger på randen.

Om vi parametriserar den nedre randkurvan, $y = x^2$, får vi $g_1(t) = f(t, t^2) = 2t^2 - t^4$. Studium av derivatan ger $0 = g_1'(t) = 4t - 4t^3 = 4t(1 - t^2)$, med nollställen i $x = t = 0$ och $x = t = \pm 1$. Återigen fås de två skärningspunkterna samt en punkt utanför området.

Den övre randkurvan, $x = y^2$, parametriseras till $g_2(t) = f(t^2, t) = 2t^4 - t^2$, vilket ger $0 = g_2'(t) = 8t^3 - 2t = 2t(4t^2 - 1)$. Nollställena blir denna gång $y = t = 0$ och $y = t = \pm 1/2$.

De intressanta punkterna är således $(0, 0)$, $(1, 1)$ och $(1/4, 1/2)$. Funktionsvärdena är $f(0, 0) = 0$, $f(1, 1) = 1$ samt $f(1/4, 1/2) = 2/16 - 1/4 = -1/8$. Minimum är därför $-1/8$ och maximum 1.

5. Beräkna

$$\int_D x \, \mathrm{d}A$$

eller

$$\int_D (x - y) \, \mathrm{d}A$$

över fyrhörningen med hörn i $(0, 0)$, $(2, 1)$, $(3, 3)$ och $(1, 2)$.

Lösning: För att kunna integrerar över detta område delar vi upp det i tre delar. Vi får

$$\begin{aligned}\int_D f(x, y) \, \mathrm{d}A = &\int_{x=0}^{1} \int_{y=x/2}^{2x} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{x=1}^{2} \int_{y=x/2}^{(x+3)/2} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\ &+ \int_{x=2}^{3} \int_{y=2x-3}^{(x+3)/2} f(x, y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Sedan beräknar vi varje del för sig. Om vi väljer integranden $f(x, y) = x$ får vi

$$\begin{aligned}\int_{x=0}^{1} \int_{y=x/2}^{2x} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x &= \int_{x=0}^{1} [xy]_{x/2}^{2x} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{x=0}^{1} \frac{3x^2}{2} \, \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^3}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\int_{x=1}^{2}\int_{y=x/2}^{(x+3)/2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=1}^{2} [xy]_{x/2}^{(x+3)/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=1}^{2}\left(\frac{3x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{3x^2}{4}\right]_1^2 = 3-\frac{3}{4} = \frac{9}{4}
\end{aligned}
$$

och

$$
\begin{aligned}
\int_{x=2}^{3}\int_{y=2x-3}^{(x+3)/2} x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_{x=2}^{3} [xy]_{2x-3}^{(x+3)/2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{x=2}^{3}\left(\frac{-3x^2}{2}+\frac{9x}{2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{-x^3}{2}+\frac{9x^2}{4}\right]_2^3 \\
&= \frac{-27}{2}+\frac{81}{4}+4-9 = \frac{27}{4}-5 = \frac{7}{4}.
\end{aligned}
$$

Summan blir således $9/2$.

Om vi väljer integranden $f(x,y) = x-y$ ser vi att den är udda kring linjen $x=y$, och området är symmetriskt kring denna linje. Integralen blir således noll.

6. Beräkna

$$\iiint_K \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}V$$

över kroppen K som ges av $x^2+y^2 \le z \le 1$.

Lösning: Vi integrerar med polära koordinater och får

$$
\begin{aligned}
\iiint_K \mathrm{e}^z\,\mathrm{d}V &= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\int_{z=r^2}^{1} \mathrm{e}^z r\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{r=0}^{1}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{r^2}\right) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi\int_0^1\left(\mathrm{e}r-\frac{2r\mathrm{e}^{r^2}}{2}\right)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\left[\frac{\mathrm{e}r^2}{2}-\frac{\mathrm{e}^{r^2}}{2}\right]_0^1 \\
&= \pi\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}-0+1\right) = \pi.
\end{aligned}
$$

7. Beräkna kurvintegralen

$$\int_\Gamma y(y-x^2)\,\mathrm{d}x + xy(3+y)\,\mathrm{d}y,$$

där Γ är randen till den nedre halvan av enhetscirkelskivan, det vill säga $x^2+y^2 \le 1$, $y \le 0$, genomlöpt medurs.

Lösning: Kurvan är sluten och vi kan således använda Greens formel. Eftersom kurvan genomlöps i negativ led sätter vi till ett minustecken. Vi får

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma y(y-x^2)\,\mathrm{d}x + xy(3+y)\,\mathrm{d}y \\
&= -\iint_{x^2+y^2\le 1, y\le 0} \left(\frac{\partial(3xy+xy^2)}{\partial x} - \frac{\partial(y^2-x^2y)}{\partial y} \right) \mathrm{d}A \\
&= -\iint_{x^2+y^2\le 1, y\le 0} \left(3y+y^2-2y+x^2\right) \mathrm{d}A \\
&= -\int_{\theta=\pi}^{2\pi} \int_{r=0}^{1} (r\sin\theta + r^2) r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta \\
&= -\int_{\pi}^{2\pi} \left[\frac{r^3\sin\theta}{3} + \frac{r^4}{4} \right]_0^1 \mathrm{d}\theta \\
&= -\left[\frac{-\cos\theta}{3} + \frac{\theta}{4} \right]_\pi^{2\pi} \\
&= -\left(\frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4} \right) = \frac{8-3\pi}{12}.
\end{aligned}$$

8. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$ ut genom halvklotet $x^2+y^2+z^2 \le 4$, $z \ge 0$.

Lösning: Vi använder Gauss sats och får

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S &= \iiint_K \nabla\cdot\boldsymbol{F}\,\mathrm{d}V \\
&= \iiint_K 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V \\
&= 3\int_{\theta=0}^{2\pi}\int_{\varphi=0}^{\pi/2}\int_{\rho=0}^{2} \rho^2\rho^2\sin\varphi\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\theta \\
&= 6\pi \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^2 [-\cos\varphi]_0^{\pi/2} = \frac{192\pi}{5}.
\end{aligned}$$

9. Antag att A är en symmetrisk matris som diagonaliseras $A = VDV^{\mathrm{T}}$. Dess egenvärden betecknas $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

   (a) Visa att om $\boldsymbol{y} = V^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$ så gäller $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{y}$.

   (b) Visa att $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2$

   (c) Visa att det minsta värde vi kan få på uttrycket $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{y}$ om $\|\boldsymbol{y}\| = 1$ är λ_1.

   (d) Visa att det minsta värde vi kan få på uttrycket $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}$ om $\|\boldsymbol{x}\| = 1$ är λ_1.

   Lösning:

   (a) Vi har

   $$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{y} = (V\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}DV\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}V^{\mathrm{T}}DV\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x}.$$

   (b) Multiplicerar vi $\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D$ får vi $(\lambda_1 y_1, \lambda_2 y_2, \cdots, \lambda_n, y_n)$ och skalärprodukten mellan denna vektor och $\boldsymbol{y}$ ger sedan svaret.

   (c) Vi har

   $$\boldsymbol{y}^{\mathrm{T}}D\boldsymbol{y} = \sum_i \lambda_i y_i^2 \geq \sum_i \lambda_1 y_i^2 = \lambda_1 \sum_i y_i^2 = \lambda_1 \|\boldsymbol{y}\|^2 = \lambda_1.$$

   Vi kan alltså inte få något lägre värde. För $\boldsymbol{y} = (1, 0, \cdots, 0)$ uppnås värdet λ_1.

   (d) Eftersom V är ortogonal gäller $\|\boldsymbol{y}\| = \|V\boldsymbol{x}\| = \|\boldsymbol{x}\|$. Därmed följer av ovanstående att $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{x} \geq \lambda_1$ för $\|\boldsymbol{x}\| = 1$. Den vektor som svarar mot $\boldsymbol{y} = (1, 0, \cdots, 0)$ är den egenvektor som hör till egenvärdet λ_1. Om vi kallar den $\boldsymbol{v}_1$ gäller

   $$\boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{T}}A\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_1{}^{\mathrm{T}}\lambda_1\boldsymbol{v}_1 = \lambda_1\|\boldsymbol{v}_1\|^2 = \lambda_1.$$

10. Bestäm och klassificera samtliga lokala extremvärden till funktionen

   $$f(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2,$$

   samt det största värdet av funktionen längs den slutna kurvan $x^4 + y^4 = 32$.

   Lösning: Eftersom funktionen är deriverbar överallt söker vi punkter där gradienten är noll. Vi får

   $$\mathbf{0} = \nabla f = (4x^3 - 4x - 4y, 4y^3 - 4x - 4y),$$

vilket ger $x^3 = y^3$ med reella lösningar $x = y$. Insatt i de ursprungliga ekvationerna ger detta $0 = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$, med lösningar $x = 0$ och $x = \pm\sqrt{2}$. Det finns alltså tre kritiska punkter.

Hessianen ges av

$$H(x, y) = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & -4 \\ -4 & 12y^2 - 4 \end{pmatrix}$$

För $(x, y) = (\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2})$ får vi $AC - B^2 = 400 - 16 = 384 > 0$ och $A = 20 > 0$, så där har vi minpunkter. För $(x, y) = (0, 0)$ har vi $AC - B^2 = 16 - 16 = 0$. Denna undersökning hjälper oss således inte där.

Vi betraktar nu värdet i punkter nära origo. Antag att h, k är små och betrakta $f(0+h, 0+k) = h^4 + k^4 - 2h^2 - 4hk - 2k^2$. Vi ser då att för $h = k$ gäller $f(h, h) = 2h^4 - 8h^2 = 2h^2(h^2 - 4) \leq 0$ och för $h = -k$ gäller $f(h, -h) = 2h^4 \geq 0$. Origo är således en sadelpunkt.

Längs kurvan $g(x, y) = x^3 + y^3 - 32 = 0$ får vi största värdet genom att betrakta Lagrangianen

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x^4 + y^4 - 2x^2 - 4xy - 2y^2 + \lambda(x^4 + y^4 - 32)$$

och finna nollställena för dess gradient. Vi få

$$\begin{aligned} 4x^3 - 4x - 4y + 4\lambda x^3 &= 0; \\ 4y^3 - 4x - 4y + 4\lambda y^3 &= 0; \\ x^4 + y^4 &= 32. \end{aligned}$$

Den första ekvationen minus den andra blir $4(1+\lambda)(x^3 - y^3) = 0$, vilket ger $x = y$ eller $\lambda = -1$. Om vi har $x = y$ ger den tredje ekvationen $2x^4 = 32$, vilket förenklas till $x = y = \pm 2$. Om vi har $\lambda = -1$ förenklas den första ekvationen till $-4(x + y) = 0$, vilket ger $x = -y$. Den tredje ekvationen ger då $x = -y = \pm 2$. De intressanta punkterna är således $\pm(2, 2)$ och $\pm(2, -2)$, med funktionsvärden $f(\pm 2, \pm 2) = 16 + 16 - 8 - 16 - 8 = 0$ och $f(\pm 2, \mp 2) = 16 + 16 - 8 + 16 - 8 = 32$. Det senare är det maximala värdet.

11. Betrakta vektorfältet $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (3yz, xz, 0)$. Beräkna arbetsintegralen

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F}\, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \int_\Gamma 3yz\, \mathrm{d}x + xz\, \mathrm{d}y,$$

där kurvan Γ är skärningskurvan mellan ytorna $z = x^2 + 1$ och $z = 2x^2 + y^2$. Betraktad ovanifrån genomlöps kurvan moturs.

Lösning: Vi kan använda Stokes sats, som säger att

$$\int_\Gamma \boldsymbol{F} \, \mathrm{d}\boldsymbol{r} = \iint_\mathrm{D} \nabla \times \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S,$$

där ytan D har Γ som rand. Normalen är uppåtriktad om kurvan genomlöps moturs sett uppifrån.

Här har vi $\nabla \times (3yz, xz, 0) = (-x, 3y, -2z)$. Skärningskurvan Γ ges av $x^2 + 1 = z = 2x^2 + y^2$, vilket ger $x^2 + y^2 = 1$. Ytan S kan väljas på flera sätt, men någon av de givna ytorna verkar enklast. Väljer vi $z = x^2 + 1$ får vi, med $g(x, y, z) = z - x^2 - 1$ att

$$\boldsymbol{n} \, \mathrm{d}S = \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = (-2x, 0, 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y.$$

Därmed har vi

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma 3yz \, \mathrm{d}x + xz \, \mathrm{d}y &= \iint_{x^2+y^2 \le 1} (-x, 3y, -2z) \cdot (-2x, 0, 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= \iint_{x^2+y^2 \le 1} 2x^2 - 2z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= 2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} x^2 - (x^2 + 1) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\
&= -2 \iint_{x^2+y^2 \le 1} \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -2\pi.
\end{aligned}$$