MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV035C, 29 augusti 2008, 8.30-12.30.
Telefonjour: Peter Lindroth, 0762 - 721860
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna, ej heller räknedosa. De primitiva funktionerna givna efter tentan får naturligtvis nyttjas utan härledning.

OBS: Ange linje samt personnummer och namn på omslaget.
Ange namn och personnummer på *varje* inlämnat blad.
Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt.
Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte gjort hemtalen under kursomgången 07–08, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 29 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som har gjort hemtalen ska enbart göra uppgifterna 1-7. De som har godkänt på alla hemtalsomgångar gör 6 av dessa uppgifter, och väljer själva vilka som görs. De som har godkänt på nästan alla hemtalsomgångar gör samtliga 7 uppgifter. Om det är hemtalsomgång k som inte klarats måste uppgift k klaras, och resterande 6 uppgifter räknas samman för poängen på tentan. Maximala antalet poäng på tentan är således 24, och gränsen för godkänt är 12. Den som siktar på högre betyg än vad tidigare prestationer i kursen (främst hemtalen) visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

---

1. Lös initialvärdesproblemet $\boldsymbol{x}'(t) = A\boldsymbol{x}(t)$ för
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix},$$
givet att $\boldsymbol{x}(0) = (1, 6)^{\mathrm{T}}$. (4p)

2. Antag att A är en symmetrisk matris med egenvektorer $(1, 2, 3)^T$ och $(2, -1, 0)^T$. Beräkna en tredje egenvektor. (4p)

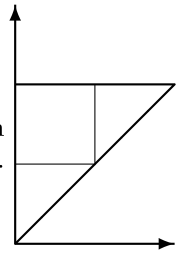
3. Skissa några nivåkurvor till funktionen $f(x, y) = x^3 - y^2$ och beräkna längden av nivåkurvan $f(x, y) = 0$ för $0 \leq x \leq 3$. (4p)

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2 - 2y$ på den slutna triangeln (det vill säga inklusive triangelns inre) med hörn i $(2, -2)$, $(2, 3)$ och $(-3, -2)$. (4p)

5. Bestäm

$$\iint_D e^{y^2}\,dx\,dy,$$

där D är området givet av $0 \leq x \leq y \leq 1$. Approximera även integralen med en Riemannsumma, där området delats upp enligt bilden till höger. (4p)



6. Kroppen K ges av $0 \leq x^2 + y^2 \leq z \leq 1$. Beräkna

$$\iiint_K \frac{1}{1+z^2}\,dV.$$

(4p)

7. Beräkna flödesintegralen

$$\iint_D (x, y, z) \cdot \boldsymbol{n}\,dS,$$

där D är den del av paraboloiden $z = 4 - x^2 - y^2$ som ligger ovanför $z = 2$. Enhetsnormalen $\boldsymbol{n}$ har positiv tredje komponent. (4p)

8. Visa att fältet

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \left(\frac{1}{1+(x-y)^2} + \frac{y+z}{1+(y+z)^2}, \frac{1}{1+(y+z)^2} - \frac{1}{1+(x-y)^2}, \frac{y+z}{1+(y+z)^2} \right)$$

är konservativt och beräkna sedan

$$\int_\gamma \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$$

för kurvan $\gamma = (e^{\cos 2t}, e^{\sin 2t}, -\cos t)$ där t går från 0 till π. (6p)

9. (a) Visa att om matrisen A har två olika egenvärden λ_1 och λ_2 med tillhörande egenvektorer $\boldsymbol{x}_1$ och $\boldsymbol{x}_2$, så är $\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2$ inte en egenvektor till A. (3p)

   (b) Antag att A är symmetrisk med egenvärdena $\lambda_1 > \ldots > \lambda_n$ och deras normerade egenvektorer $\boldsymbol{u}_1, \ldots, \boldsymbol{u}_n$ (kolumnvektorer). Ange egenvärdena till matrisen $A - \lambda_1 \boldsymbol{u}_1 \boldsymbol{u}_1^T$ med hjälp av egenvärdena till A. (3p)

10. Beräkna

$$\iint_D xy^2\,dx\,dy$$

där D ges av området begränsat av kurvorna $x \leq y \leq 3x$, $1/x^2 \leq y \leq 2/x^2$. (6p)

$$\int \ln x\,dx = x \ln x - x + C$$

$$\int \arctan x\,dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C$$

$$\int \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C$$