MATEMATIK
Chalmers tekniska högskola och Göteborgs universitet
Tentamen i Analys och linjär algebra C för K, Kf och Bt, TMV035C, 10 januari 2009, 14.00–18.00.
Telefonjour: Jacob Sznajdman, 0762 - 721860
Inga hjälpmedel, förutom penna och linjal, är tillåtna. Exempelvis är räknedosa inte tillåten.

OBS: Motivera dina svar väl. Det är i huvudsak beräkningarna och motiveringarna som ger poäng, inte svaret. Skriv tydligt. Information om när tentan är färdigrättad och tid för visning av tentan kommer att lämnas på kurshemsidan.
Lycka till!

Den ordinarie tentan, för de som inte gjort hemtalen under kursomgången 07–08, består av samtliga nedanstående tal. Gränsen för godkänt är 22 poäng. Preliminära gränser för högre betyg är 29 poäng för fyra och 36 poäng för femma.

De som har gjort hemtalen ska enbart göra uppgifterna 1-7. De som har godkänt på alla hemtalsomgångar gör 6 av dessa uppgifter, och väljer själva vilka som görs. De som har godkänt på nästan alla hemtalsomgångar gör samtliga 7 uppgifter. Om det är hemtalsomgång k som inte klarats måste uppgift k klaras, och resterande 6 uppgifter räknas samman för poängen på tentan. Maximala antalet poäng på tentan är således 24, och gränsen för godkänt är 12. Den som siktar på högre betyg än vad tidigare prestationer i kursen (främst hemtalen) visat, får även göra den ordinarie tentan. Då räknas det bästa betyget.

---

1. Beräkna egenvärden och egenvektorer till matrisen
$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$
(4p)

2. Verifiera att
$$\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$
är en ortogonal mängd, och projicera sedan $\boldsymbol{x} = (3, 2, -4)^T$ på $U = \text{Span}\{\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\}$. (4p)

3. Ange tangentplanet till funktionen $f(x, y) = \sin(x^2 - y^2) + \cos(\pi x)$ i punkten $(2, -2, 1)$ och ge sedan ett ungefärligt värde för $f(2.1, -1.8)$. (4p)

Var god vänd!

4. Bestäm det största och minsta värdet av $f(x, y) = xy^2 - x^2 - y$ på rektangeln $0 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$. (4p)

5. Beräkna
$$\iint_D \frac{x}{1+y^2}\,\mathrm{d}A,$$
där D är området givet av $x^2 \leq y \leq 1, x \geq 0$. (4p)

6. Kroppen K ges av $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, y \geq 0, z \geq 0$. Beräkna
$$\iiint_K z\,\mathrm{d}V.$$
(4p)

7. Beräkna flödet av $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (4xz, -y^2, yz)$ ut genom enhetskuben, det vill säga
$$\iint_S (4xz, -y^2, yz) \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S,$$
där S begränsar området $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. (4p)

8. Bestäm största möjliga volym för en låda vars botten och sidor har sammanlagd area 3. Locket räknas alltså inte till arean. Lådans sidor förutsätts vara parallella med koordinatplanen (räta vinklar i lådan). (6p)

9. Bestäm minsta-kvadrat-lösningen till systemet
$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 6; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0; \\ x_1 + x_2 &= 9; \\ x_1 + x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned}$$
(6p)

10. Beräkna kurvintegralen
$$\int_\Gamma (x^2 - y + 2\ln(1+y))\,\mathrm{d}x + \frac{(1+x)^2}{1+y}\,\mathrm{d}y,$$
där Γ är den övre halvan av enhetscirkeln medurs från $(-1, 0)$ till $(1, 0)$. (6p)