Lösningsförslag, dugga 3a (gul)

1.) Låt $g(x,y,z) = f(x,y) - z = \sqrt{x+y} - z$.

Vi kan nu betrakta Y som nivåytan

$\{(x,y,z);\ g(x,y,z) = 0\}$

En normalvektor till Y i punkten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

är $\nabla g(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$

En punkt (x,y,z) ligger alltså på tangentplanet till Y i punkten $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1)$

omm $$(x-\tfrac{1}{2}, y-\tfrac{1}{2}, z-1) \bullet \nabla g(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},1) = 0$$

dvs. $$\frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}) - (z-1) = 0$$

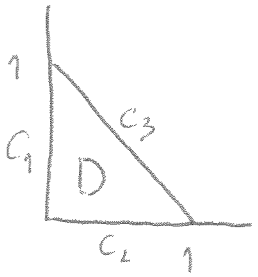
$$\Longleftrightarrow$$

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}$$

2.) a) De (eventuella) kritiska punkterna till f uppfyller ekvationen $\mathbb{0} = \nabla f(x,y)$

Men $\nabla f(x,y) = (2+2x, -1) \neq \mathbb{0}$ så det finns alltså inga kritiska punkter.

2.) b) Eftersom det inte finns några kritiska punkter måste största värdet (som vi vet måste finnas enl. sats A13.1:2) antas på randen till D.



Vi undersöker randkurvorna C_1, C_2, C_3 separat.

$\underline{C_1}$: Är parametriserad av $x=0,\ y=t,\ 0\le t\le 1$.
Vi skall alltså optimera $f_1(t) = f\big|_{C_1} = -t$ på intervallet $0 \le t \le 1$.
$f_1'(t) = -1 \neq 0$ så maximum måste antas i någon av ändpunkterna av C_1:
$(0,0)$, $(0,1)$

$\underline{C_2}$: Är parametriserad av $x=t,\ y=0,\ 0\le t\le 1$
Vi skall alltså optimera $f_2(t) = f\big|_{C_2} = 2t+t^2$ på intervallet $0 \le t \le 1$.
$f_2'(t) = 2+2t = 0 \Rightarrow t=-1$ som inte är i det tillåtna intervallet.

Även i detta fall blir kandidaterna till maxpunkter de två ändpunkterna av C_2:
$(0,0)$, $(1,0)$

$\underline{\underline{C_3}}$: Är parametriserad av $x=t$, $y=1-t$, $0\le t\le 1$ så vi skall optimera $f_3(t) = f\big|_{C_3} = 2t-(1-t)+t^2$ $= t^2+3t-1$ på intervallet $0\le t\le 1$.

$f_3'(t) = 2t+3 = 0 \Rightarrow t = -3/2$ som inte är i det tillåtna intervallet.

Kandidater till maxpunkter är återigen de två ändpunkterna av C_3: $(1,0)$, $(0,1)$

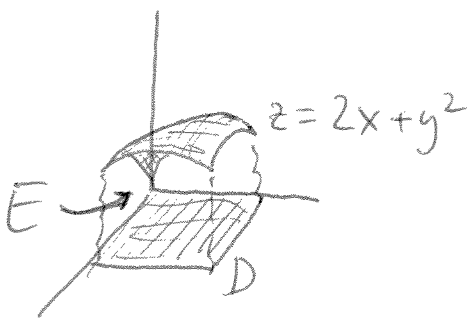
Kandidater till maxpunkter:

$(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$

$f(0,0)=0$, $f(1,0)=3$, $f(0,1)=-1$

Svar: Största värdet av f på D är 3.

3./



$$Vol(E) = \iint_D 2x+y^2\,dx\,dy$$

där $D = \{(x,y);\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$

$$\text{Så } Vol(E) = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} 2x+y^2\,dy\,dx = \int_{x=0}^{1}\left[2xy+\frac{y^3}{3}\right]_{y=0}^{1}dx$$

$$= \int_0^1 2x+\frac{1}{3}\,dx = \left[x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1 = 4/3$$