

Lösningsförslag, dagga 3a (vit)

1.) Låt $g(x, y, z) = f(x, y) - z = \sqrt{2x+y} - z$.

Vi kan nu betrakta Σ som nivåytan $\{(x, y, z); g(x, y, z) = 0\}$

En normalvektor till Σ i punkten $(1, 2, 2)$ är

$$\nabla g(1, 2, 2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -1 \right).$$

En punkt (x, y, z) ligger alltså på tangentplanet till Σ i punkten $(1, 2, 2)$ om

$$(x-1, y-2, z-2) \cdot \nabla g(1, 2, 2) = 0$$

dvs.

$$\frac{1}{2}(x-1) + \frac{1}{4}(y-2) - (z-2) = 0$$

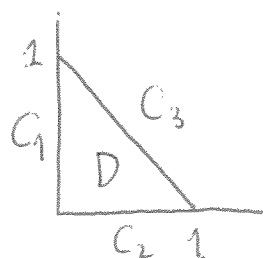
eller omskrivet som

$$z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}y + 1.$$

2.) a) De (eventuella) kritiska punkterna till f uppfyller ekvationen $0 = \nabla f(x, y)$.

Men $\nabla f(x, y) = (-2, 1+2y) \neq 0$ så det finns inga kritiska punkter.

2.) b) Eftersom det inte finns några kritiska punkter måste största värdet (som måste finnas enl sats A13.1:2) antas på randen av D .



Vi undersöker randkurvorna C_1, C_2, C_3 separat.

C_1 : Är parametriserad av $x=0, y=t, 0 \leq t \leq 1$.

$$\text{Så } f|_{C_1} = t + t^2 = f_1(t).$$

$$f_1'(t) = 1 + 2t = 0 \Rightarrow t = -1/2$$

Men punkten $(x=0, y=-1/2)$ ligger inte på C_1 .

Kandidater till maxpunkter på C_1 är därför bara de två "ändpunkterna" $(0,0), (0,1)$

C_2 : Är parametriserad av $x=t, y=0, 0 \leq t \leq 1$

$$f|_{C_2} = -2t \text{ som har nollskild derivata}$$

Så kandidater på C_2 är de två "ändpunkter" $(0,0), (1,0)$

C_3 : Är parametriserad av $y=t$, $x=1-t$, $0 \leq t \leq 1$

$$f|_{C_3} = t - 2(1-t) + t^2 = t^2 + 3t - 2 = f_3(t)$$

$$f_3'(t) = 2t + 3 = 0 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$$

Men $(x=1+\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{2})$ ligger inte på C_3

Så de enda kandidaterna på C_3 är
ändpunkterna och dessa är redan medtagna

Kandidater till maxpunkter:

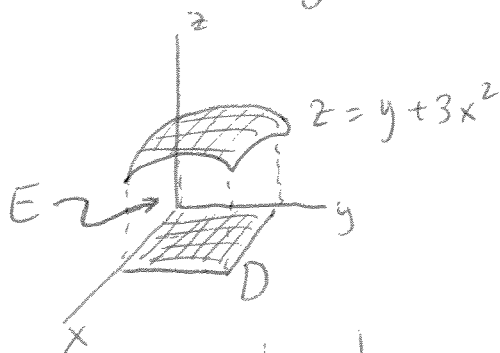
$$(0,0), (0,1), (1,0)$$

$$f(0,0)=0, \quad f(0,1)=\mathbf{2}, \quad f(1,0)=-2$$

Svar: Största värdet i D
är $\mathbf{2}$.

$$3.) \text{ Vol}(E) = \iint_D y + 3x^2 \, dy \, dx$$

$$\text{där } D = \left\{ (x,y); 0 \leq x \leq 1 \right. \\ \left. 0 \leq y \leq 1 \right\}$$



$$\begin{aligned} \text{Vol}(E) &= \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^1 y + 3x^2 \, dy \, dx = \int_{x=0}^1 \left[\frac{y^2}{2} + 3x^2 y \right]_{y=0}^1 \, dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} + 3x^2 \right) \, dx = \left[\frac{x}{2} + x^3 \right]_0^1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$