

Lösningsförslag, dagga 3b (gul)

1.) Jacobianen av f är
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{bmatrix}$$

Så Jacobianen av f i punkten $(1,1)$ är

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

2.) a) De kritiska punkterna är de som uppfyller ekvationen $0 = \nabla f(x,y)$, dvs.

$$0 = \left(2\left(x - \frac{1}{2}\right) + y, 4\left(y - \frac{1}{4}\right) + x \right)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 4y = 1 \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem löses tex. med radreduktion.

V. för $x = \frac{3}{7}$, $y = \frac{1}{7}$ (Denna punkt är i D)

Svar: En kritisk punkt: $\left(\frac{3}{7}, \frac{1}{7}\right)$

b) För att avgöra den kritiska punktens natur beräknar vi Hessianen i den kritiska punkten.

$$H = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hessianen har de två egenvärdena $\lambda = 3 - \sqrt{2} > 0$ och $\lambda = 3 + \sqrt{2} > 0$.

Eftersom dessa är positiva har funktionen ett lokalt minimum i punkte $(\frac{3}{7}, \frac{1}{7})$

3.) Vi byter till polära koordinater:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Området E blir, uttryckt i polära koordinater,

$$E' = \{ (r, \theta); 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4} \}.$$

$$\text{Så } \iint_E (x+y) dx dy = \iint_{E'} (r \cos \theta + r \sin \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} r^2 (\cos \theta + \sin \theta) d\theta dr$$

$$= \int_{r=0}^1 r^2 \left[\sin \theta - \cos \theta \right]_{\theta=\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} dr$$

$$= \int_0^1 r^2 \left(-\cos \frac{3\pi}{4} + \cos \frac{\pi}{4} \right) dr = \frac{2}{\sqrt{2}} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}.$$

Anm: Man kan från början observera att

$\iint_E (x+y) dx dy = \iint_E y dx dy$ eftersom E är symmetriskt runt y -led och x är en udda funktion.