

Lösningsförslag, dagga 3b (vit)

1.) Jacobianen av f är $\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4x & -2y \\ y & x \end{bmatrix}$

Så Jacobianen av f i punkten $(1,1)$ är

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.) a) De kritiska punkterna är de som uppfyller ekvationen $0 = \nabla f(x,y)$, dvs.

$$0 = (4(x-1) + 4y, 2(y - \frac{3}{2}) + 4x)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 4x + 4y = 4 \\ 4x + 2y = 3 \end{cases}$$

Detta linjära ekvationssystem
löses tex. med raderuktion.

Vi får $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{2}$ (som är en punkt i D)

Svar: En kritisk punkt: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

b) För att argöra den kritiska punktens natur beräknar vi Hessianen i den kritiska punkte

$$\mathcal{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$$

Hessianen har de två egenvärdena $\lambda = 3 - \sqrt{17} < 0$
och $\lambda = 3 + \sqrt{17} > 0$.

Eftersom dessa har olika tecken har funktionen
en saddelpunkt i $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

3.) Vi byter till polära koordinater :

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$$

Uttryckt i polära koordinater blir
området E :

$$E' = \{(r, \theta) ; 0 \leq r \leq 1, \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \frac{3\pi}{4}\}$$

$$\iint_E (2y - x) dx dy = \iint_{E'} (2r \sin \theta - r \cos \theta) r dr d\theta$$

$$= \int_{r=0}^1 \int_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} r^2 (2 \sin \theta - \cos \theta) d\theta dr = \int_{r=0}^1 r^2 \left[-2 \cos \theta - \sin \theta \right]_{\theta=\pi/4}^{3\pi/4} dr$$

$$= \int_0^1 r^2 \left(-2 \cos \frac{3\pi}{4} + 2 \cos \frac{\pi}{4} \right) dr = \frac{4}{\sqrt{2}} \int_0^1 r^2 dr = 2\sqrt{2} \left[\frac{r^3}{3} \right]_0^1 =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Ann: Man kan från början observera att

$$\iint_E (2y - x) dx dy = \iint_E 2y dx dy \text{ eftersom } E \text{ är}$$

symmetriskt i x -led och x är en udda funkt.