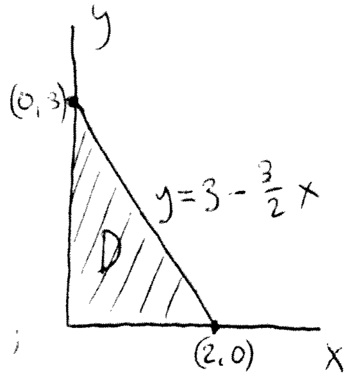
Lösningsförslag, tenta 5/3 -10, ALA C

1.)



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_{x=0}^{2}\left(\int_{y=0}^{3-\frac{3x}{2}} xy\,dy\right)dx = \int_{x=0}^{2} x\left[\frac{y^2}{2}\right]_{y=0}^{3-\frac{3x}{2}}dx$$

$$= \int_0^2 x\cdot\frac{\left(3-\frac{3x}{2}\right)^2}{2}\,dx = \frac{1}{2}\int_0^2 9x-9x^2+\frac{9}{4}x^3\,dx =$$

$$= \frac{9}{2}\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+\frac{x^4}{16}\right]_0^2 = 3/2$$

2.) a) Lineariseringen, $L(x,y)$, av $f(x,y)$ i punkten $(1,1)$ är (enl. Adams avsnitt 12.6)

$$f(x,y)\approx L(x,y) = f(1,1)+\frac{\partial f}{\partial x}(1,1)\cdot(x-1)+\frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\cdot(y-1)$$

$$= 2+\frac{1}{2}(x-1)+\frac{3}{4}(y-1)$$

b) $\sqrt{3} = f\left(\frac{3}{4},\frac{13}{16}\right)\approx L\left(\frac{3}{4},\frac{13}{16}\right) = 2+\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-1\right)+\frac{3}{4}\left(\frac{13}{16}-1\right)$

$= \frac{111}{64}\approx 1{,}73$

3.) Vi börjar med att beräkna egenvärden och egenvektorer till A.

Egenvärden:

$$0 = \det(A - \lambda I) = \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 4 & -1-\lambda \end{bmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(-1-\lambda) - 8 = \lambda^2 - 9 \quad \Rightarrow \quad \lambda = \pm 3$$

Egenvektorer:

- Hörande till $\lambda = 3$:

  Lös ekv. systemet $(A - 3I)\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 4 & -4 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

  Efter radreduktion får vi $\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ där t är en fri variabel

- Hörande till $\lambda = -3$:

  Lös ekv. systemet $(A + 3I)\mathbf{x} = 0$

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = t \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Enl. Lay, avsnitt 5.3 skall vi sätta

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

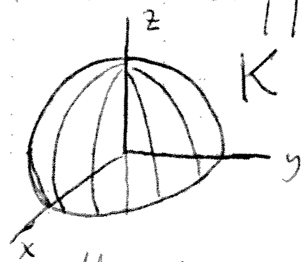
Vi beräknar $P^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

och får den önskade diagonaliseringen:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 \\ -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

4.) Kroppens massa är given av trippelintegralen

$$\iiint_K \delta(x,y,z)\,dxdydz.$$



Vi beräknar denna genom att byta till sfäriska koordinater (ρ, φ, θ)

$$\begin{cases} x = \rho \sin\varphi \cdot \cos\theta \\ y = \rho \sin\varphi \cdot \sin\theta \\ z = \rho \cos\varphi \end{cases} \qquad dxdydz = \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$$

Uttryckt i sfäriska koordinater blir K området

$$K' = \{(\rho, \varphi, \theta);\ 0 \le \rho \le 1,\ 0 \le \varphi \le \tfrac{\pi}{2},\ 0 \le \theta \le \tfrac{\pi}{2}\}$$

Så $\iiint_K \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_{K'} \delta \cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\varphi\, d\theta$

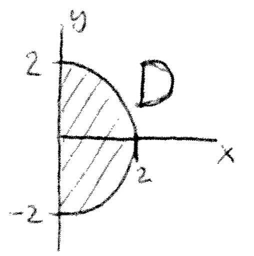
$$= \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} \int_{\theta=0}^{\pi/2} (1+\rho\cos\varphi)\cdot \rho^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\rho=0}^{1} \int_{\varphi=0}^{\pi/2} (\rho^2 \cdot \sin\varphi + \rho^3 \cos\varphi \cdot \sin\varphi)\, d\varphi\, d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_{\rho=0}^{1} \left[-\rho^2\cos\varphi - \frac{\rho^3}{2}\cos^2\varphi\right]_{\varphi=0}^{\pi/2} d\rho$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 \rho^2 + \frac{\rho^3}{2}\, d\rho = \frac{\pi}{2}\left[\frac{\rho^3}{3} + \frac{\rho^4}{8}\right]_0^1 = \frac{11\pi}{48} \quad (\text{gram})$$

5.)



a) Området D är slutet och begränsat och funktionen f är kontinuerlig. Enligt sats 13.1:2 i Adams har f största och minsta värde i D.

b) Kandidater till max- och minpunkter är
1) Singulära punkter, 2) kritiska punkter, 3) randpunkter

1) Singulära punkter: Finns inga eftersom f är differentierbar.

2.) Kritiska punkter: Är de som uppfyller $0 = \nabla f(x,y)$

dvs. $0 = \left(e^{-x^2-y^2} - 2x(x+y)e^{-x^2-y^2},\ e^{-x^2-y^2} - 2y(x+y)e^{-x^2-y^2}\right)$

dvs. $(*)\begin{cases} 1 = 2x(x+y) \\ 1 = 2y(x+y) \end{cases}$

Vi ser att $x \neq 0$, $y \neq 0$, $(x+y) \neq 0$.

Dividera första ekv. med den andra: $1 = \frac{x}{y} \Rightarrow x = y$

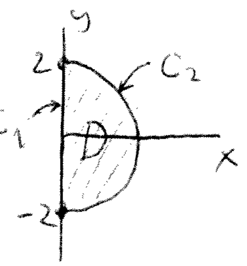
Sätt in i t.ex. den första ekv.: $1 = 2x(x+x) = 4x^2$

$\Rightarrow x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}$

$(*)$ har alltså lösningarna $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ och $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$

Men $(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ ligger inte i D så f har bara en kritisk punkt i D: $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3.) Randpunkter:



Randen av D består av de två kurvorna C_1 och C_2

C_1: är parametriserad av $x = 0$, $y = t$, $-2 \leq t \leq 2$

$$f|_{C_1} = te^{-t^2} =: f_1(t)$$

$$f_1'(t) = e^{-t^2}(1 - 2t^2) = 0 \Rightarrow t = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Kandidater på C_1 är alltså $(0, 1/\sqrt{2})$, $(0, -1/\sqrt{2})$ och ändpunkterna $(0, 2)$, $(0, -2)$

C_2: är parametriserad av $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$, $-\frac{\pi}{2} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$

$$f|_{C_2} = 2(\cos t + \sin t)e^{-4} =: f_2(t)$$

$$f_2'(t) = (-\sin t + \cos t)\cdot 2e^{-4} = 0 \Rightarrow \sin t = \cos t$$

$$\Rightarrow t = \pm\frac{\pi}{4}\left(+n\cdot\pi\right)$$

Kandidater på C_2 är alltså $\left(2\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\frac{\pi}{4}\right) =$
$= (\sqrt{2}, \sqrt{2})$ och $\left(2\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right), 2\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = (\sqrt{2}, -\sqrt{2})$

Kandidater till extrempunkter för f i D är:

$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $(0,-2)$, $\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $(0,2)$, $(\sqrt{2},\sqrt{2})$, $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$

$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{2}}$, $f(0,-2) = -2e^{-4}$, $f\left(0, \frac{-1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$

$f\left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-1/2}$, $f(0,2) = 2e^{-4}$, $f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 2\sqrt{2}e^{-4}$, $f(\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 0$

Största värde: $f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = e^{-1/2}$

6.) a) Vi försöker hitta en potential φ, dvs. en funktion s.a. $\nabla\varphi = \mathbb{F}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial\varphi}{\partial x} = x \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} = y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z) \\ \frac{\partial C_1}{\partial y} = y^2 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} = z^3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + C_1(y,z) \\ C_1 = \frac{y^3}{3} + C_2(z) \\ \frac{\partial C_2}{\partial z} = z^3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + C_2(z) \\ C_2 = \frac{z^4}{4} + C_3 \end{cases}$$

konstant.

Så $\varphi(x,y,z) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^3}{3} + \frac{z^4}{4}$ är en potential till $\mathbb{F}$ och $\mathbb{F}$ är alltså konservativt.

b) Eftersom $\mathbb{F}$ är konservativt gäller

$$\int_C \mathbb{F} \cdot d\mathbb{r} = \varphi(\text{slutpunkt}) - \varphi(\text{startpunkt})$$

$$= \varphi(1,1,0) - \varphi(-1,-1,0)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) = 2/3$$

7.) a) Vi vet från Lay, avsnitt 5.7, att $\mathbb{V} \cdot e^{\lambda t}$ är en lösning till $\mathbb{X}'(t) = A\mathbb{X}(t)$ omm $\mathbb{V}$ är en egenvektor och λ är tillhörande egenvärde

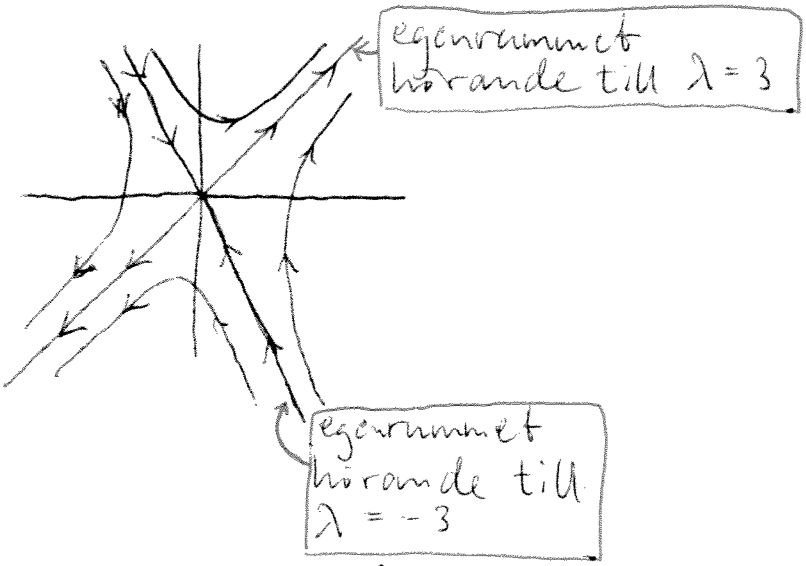
Vi har sett att $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ är egenvektorer och att tillhörande egenvärden är 3 resp. -3

Alltså är $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t}$ och $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t}$ lösningar till $\mathbb{X}' = A\mathbb{X}$.

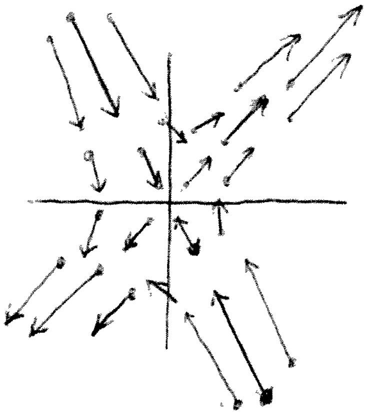
Allmäna lösningen är linjärkombinationer av dessa två.

Allmänna lösningen: $C_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{3t} + C_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-3t}$

b)



c)



8.) a) $\mathrm{Col}\, M = \mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ och $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$

så $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala.

Vi kan alltså beräkna projektionen $\hat{\mathbf{b}}$ av $\mathbf{b}$ på $\mathrm{Col}\, M$ med formeln

$$\hat{\mathbf{b}} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2$$

$$= \frac{12}{6} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \frac{21}{21} \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) Per def. är $\hat{\mathbf{b}}$ i $\mathrm{Col}\, M$. Men $\mathrm{Col}\, M$ är bilden av M, dvs $\mathrm{Col}\, M = \{M\mathbf{x} ; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2\}$

Alltså finns $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ så att $\hat{\mathbf{b}} = M\mathbf{x}$.

c) $\|M\mathbb{x}-\mathbb{b}\|$ är minimal precis då avståndet mellan $\mathbb{b}$ och $M\mathbb{x}$ är minimalt, dvs. då $M\mathbb{x} = \hat{\mathbb{b}}$ är projektionen av $\mathbb{b}$ på Col M.
Vi skall alltså lösa

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$ som har lösn. $\mathbb{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

9.) Se beviset av sats 6.1:3 i Lay