Lösningsförslag, tenta 13 mars 2010

Analys och linjär algebra K Kf Bt, del C

---

1. Vi räknar med upprepad integration:

$$\begin{aligned}\iiint_R x^3y^2z\,dxdydz &= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2}\int_{z=0}^{3} x^3y^2z\,dxdydz = \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{2} x^3y^2\left[z^2/2\right]_0^3 dxdy \\ &= 3^2/2\int_{x=0}^{1} x^3\left[y^3/3\right]_0^2 dx = 3^2/2\cdot 2^3/3\cdot\left[x^4/4\right]_0^1 \\ &= 3.\end{aligned}$$

2. Låt B vara matrisen $B = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2]$.

   a) Det är klart att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende (ingen är en skalär gånger den andra). Vi måste också kolla att $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ spänner upp $\mathbb{R}^2$, dvs. att varje vektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$ kan skrivas $\mathbf{v} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$. Detta är samma sak som att säga att ekvationssystemet $B\mathbf{x} = \mathbf{v}$ har en lösning. Men det har det; B är inverterbar eftersom $\mathbf{b}_1$ och $\mathbf{b}_2$ är linjärt oberoende.

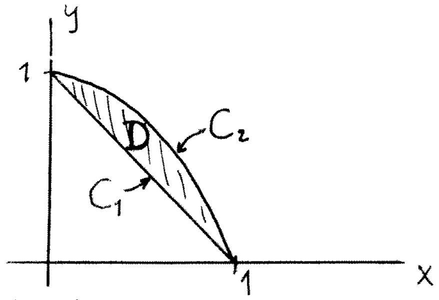
   b) Vi vill hitta skalärer x_1 och x_2 så att $\mathbf{y} = x_1\mathbf{b}_1 + x_2\mathbf{b}_2$, dvs. vi vill lösa ekvationssystemet $\mathbf{y} = B\mathbf{x}$ där $\mathbf{x} = [x_1\ x_2]^T$. Efter radreduktion får vi att $\mathbf{x} = [3/7\ 1/7]^T$ som är den önskade koordinatvektorn.

3. Kandidater till största och minsta värde i D är singulära punkter, kritiska punkter och randpunkter.

   Singulära punkter finns inte eftersom f är differentierbar.

   Kritiska punkter är de som uppfyller $\mathbf{0} = \nabla f(x,y)$. Vi har att $\nabla f(x,y) = (4/9+y/3, 1+x/3)$, så $\mathbf{0} = \nabla f(x,y) \Rightarrow x = -3,\ y = -4/3$. Men $(-3,-4/3) \notin D$ så det finns alltså inga kritiska punkter i D.

   Randpunkter: "Hörnen" är alltid kandidater.



Kurvan C_1 är parametriserad av $x = t,\ y = 1-t,\ 0 \le t \le 1$ så f betraktad på C_1 är $f_1(t) = 4t/9 + 1 - t + t(1-t)/3 = 1 - 2t/9 - t^2/3$. Kritiska punkter till $f_1(t)$ är de som uppfyller $0 = f_1'(t) = -2/9 - 2t/3$. Vi får $t = -1/3$ som inte motsvarar en punkt på C_1.

Kurvan C_2 är parametriserad av $x = t,\ y = 1 - t^2,\ 0 \le t \le 1$ så f betraktad på C_2 är $f_2(t) = 4t/9 + 1 - t^2 + t(1-t^2)/3 = 1 + 7t/9 - t^2 - t^3/3$. Kritiska punkter till $f_2(t)$ är de som uppfyller $0 = f_2'(t) = 7/9 - 2t - t^2$. Vi får $t = 1/3$ eller $t = -7/3$.

$t = -7/3$ svarar inte mot någon punkt på C_2 men $t = 1/3$ svarar mot punkten $x = 1/3$, $y = 1 - 1/9 = 8/9$.

Kandidater till max- och minpunkter är: $(0,1)$, $(1,0)$ och $(1/3, 8/9)$. Vi har $f(0,1) = 1$, $f(1,0) = 4/9$ och $f(1/3, 8/9) = 92/81$, så största värdet är $92/81$ och minsta värdet är $4/9$.

4. a) Ja! Matrisen A är symmetrisk så spektralsatsen ger att det finns en ortogonalbas för $\mathbb{R}^2$ bestående av egenvektorer till A.

   b) Vi börjar med att diagonalisera A. Egenvärden hittar vi genom att lösa den karaktäristiska ekvationen $0 = \det(A - \lambda I) = (9/10 - \lambda)(3/5 - \lambda) - 1/25$. Vi får $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/2$. Tillhörande egenvektorer hittar vi genom att lösa ekvationssystemen $(A - \lambda_1 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ och $(A - \lambda_2 I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$.
   Efter radreduktion får vi att $[-2s \;\; s]^T$ är lösningen till det första ekvationssystemet och att $[t \;\; 2t]^T$ är lösningen till det andra (s och t är fria variabler). Vi tar $\mathbf{v}_1 = [-2 \;\; 1]^T$ och $\mathbf{v}_2 = [1 \;\; 2]^T$ som egenvektorer hörande till $\lambda_1 = 1$ och $\lambda_2 = 1/2$ respektive. Sätt nu

$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}.$$

   Vi får

$$\begin{aligned} A^5 &= (PDP^{-1})^5 = PD^5P^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2^5 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 129/4 & -31/2 \\ -31/2 & 9 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

5. a) Planet Π är nivåytan $\{(x_1, x_2, x_3);\ f(x_1, x_2, x, 3) = 0\}$ så en normalvektor ges av gradienten $\nabla f(x_1, x_2, x_3) = (1, -1, 2)$.

   b) Projektionerna av standardbasvektorerna $\mathbf{e}_1 = [1 \;\; 0 \;\; 0]^T$, $\mathbf{e}_2 = [0 \;\; 1 \;\; 0]^T$ och $\mathbf{e}_3 = [0 \;\; 0 \;\; 1]^T$ på underrummet V genererat av $\mathbf{n} = [1 \;\; -1 \;\; 2\;]^T$ ges av

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_1) = \frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_2) = \frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{-1}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix},$$

$$\mathrm{Proj}_V(\mathbf{e}_3) = \frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{2}{6}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}.$$

   c) Matrisen för T i standardbasen ges av $[T(\mathbf{e}_1) \; T(\mathbf{e}_2) \; T(\mathbf{e}_3)]$ så vi räknar:

$$T(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_1 - 2\frac{\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1/6 \\ -1/6 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{bmatrix},$$

$$T(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_2 - 2\frac{\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} -1/6 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix},$$

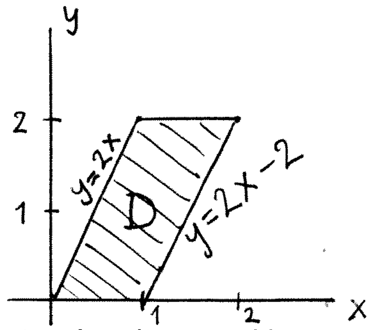
$$T(\mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_3 - 2\frac{\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{bmatrix}.$$

Marisen för T i standardbasen blir alltså

$$\begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 2/3 & 2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

6. Figuren nedan antyder att följande variabelbyte möjligen kan underlätta räkningarna.

$$\begin{cases} u &= 2x - y \\ v &= y \end{cases}, \quad \text{dvs.} \quad \begin{cases} x &= (u+v)/2 \\ y &= v \end{cases}.$$



Området D uttryckt i uv-koordinaterna blir $D' = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \le u \le 2,\ 0 \le v \le 2\}$. Vi beräknar också funktionaldeterminanten

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\left(\begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 1/2.$$

Enligt regeln för variabelbyten i dubbelintegraler får vi nu

$$\begin{aligned} \iint_D \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-y)\right) dxdy &= \iint_{D'} \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\frac{1}{2}\,dudv = \int_{u=0}^{2}\int_{v=0}^{2} \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right)\frac{1}{2}\,dudv \\ &= \int_0^2 \sin\left(\frac{\pi}{2}u\right) du = \frac{4}{\pi}. \end{aligned}$$

7. Vektorfältet $\mathbf{F} = (F_1, F_2) = (xy, x^2 + y)$ är differentierbart och kurvan $\mathcal{C}$ genomlöps moturs och innesluter triangeln T. Vi kan alltså beräkan det efterfrågade flödet m.h.a. divergenssatsen i 2D.

Vi får

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,ds &= \iint_T \frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dxdy = \iint_T y+1\,dxdy\\ &= \{\text{av symmetri}\} = \iint_T dxdy = \text{Area}(T) = 1.\end{aligned}$$

8. Vi börjar med att skriva om funktionen f:

$$\begin{aligned}f(\mathbf{x}) &= \|A\mathbf{x}-\mathbf{b}\|^2 = \|x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b}\|^2 = (x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b})\cdot(x_1\mathbf{v}_1+x_2\mathbf{v}_2-\mathbf{b})\\ &= x_1^2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2^2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+2x_1x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-2x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b})-2x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b})+\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}.\end{aligned}$$

a) Gradienten av f blir alltså

$$\begin{aligned}\nabla f(\mathbf{x}) &= 2(x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b},\ x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b})\\ &= 2(3x_1+6x_2-7/6,\ 14x_2+6x_1-1).\end{aligned}$$

b) Per definition är $\mathbf{x}=[x_1\ \ x_2]^T$ en kritisk punkt om $\mathbf{0}=\nabla f(\mathbf{x})$. Enligt uppgift a) kan denna ekvation skrivas

$$\begin{cases} 0 = x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1)+x_2(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ 0 = x_2(\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)+x_1(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)-\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{cases},$$

som på matrisform blir

$$\begin{bmatrix}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Men eftersom $A=[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]$ är

$$A^TA=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \mathbf{v}_2^T\end{bmatrix}[\mathbf{v}_1\ \ \mathbf{v}_2]=\begin{bmatrix}(\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_1) & (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2)\\ (\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_2\cdot\mathbf{v}_2)\end{bmatrix},\quad \text{och}$$

$$A^T\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1^T\\ \mathbf{v}_2^T\end{bmatrix}\mathbf{b}=\begin{bmatrix}\mathbf{v}_1\cdot\mathbf{b}\\ \mathbf{v}_2\cdot\mathbf{b}\end{bmatrix}.$$

Ekvationssystemet (1) kan alltså skrivas som $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$ och vi har visat att $\nabla f(\mathbf{x})=\mathbf{0}$ om och endast om $A^TA\mathbf{x}=A^T\mathbf{b}$.

9. Se beviset av sats 12.7:6 i Adams.