

Introduktion till Fouriers metod (avsnitt 20.7)

Exempel på svängningsproblem

$$\begin{cases} u''_{xx} = u''_{tt} & \text{vågekvationen} \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0 & \text{randvillkor} \\ u(x, 0) = f(x), u'_t(x, 0) = g(x) & \text{begynnelsevillkor} \end{cases}$$

Metoden går ut på att först i differentialekvationen hitta alla lösningar av formen $u(x, t) = X(x)T(t)$ som dessutom uppfyller randvillkoren. Detta visar sig ge en följd av funktioner u_n sådan att $u_n(x, t) = (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \cdot \sin nx$ löser differentialekvationen och randvillkoren.

Såväl ekvationen som randvillkoren är homogena vilket innebär att varje ändlig summa

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^N u_n(x, t)$$

också löser dem. Man bildar sedan serien

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cos nt + d_n \sin nt) \sin nx$$

och försöker bestämma parametrarna i T_n så att även begynnelsevillkoren blir satisfierade.

Några problem

1. Hur vet man att $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ konvergerar och satisfierar differentialekvationen bara för att varje ändlig delsumma gör det? Kan man derivera termvis i en oändlig serie?
2. Kan parametrarna c_n och d_n bestämmas så att begynnelsevillkoren blir uppfyllda? Vi vill exempelvis ha $u(x, 0) = f(x)$ där $f(x)$ är en given funktion dvs

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin nx = f(x).$$

Hur gör man i så fall praktiskt?