

Approximation i rum med skalärprodukt

(jfr Lay:6.1-3)

Projektion

Antag att V är ett rum med skalärprodukt och att $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$ är en ortogonal bas för ett underrum U .

- Det finns för varje $\mathbf{v}$ i V en entydig uppdelning

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{w}$$

där $\hat{\mathbf{v}}$ ligger i U och $\mathbf{w}$ är ortogonal mot varje vektor i U .

- Denna vektor $\hat{\mathbf{v}}$ kallas **ortogonala projektionen** av $\mathbf{v}$ på U och har framställningen

$$\hat{\mathbf{v}} = \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u}_1)}{(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_1)} \mathbf{u}_1 + \dots + \frac{(\mathbf{v}, \mathbf{u}_p)}{(\mathbf{u}_p, \mathbf{u}_p)} \mathbf{u}_p$$

- $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 + \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2$
- $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$ för varje vektor $\mathbf{u}$ i U , med likhet bara då $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}$.