

Formelblad för I2: Transformer och matematisk programvara

läsåret 03/04.

Trigonometriska formler

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1 = 1 - 2 \sin^2 x$$

$$\sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x + y) + \sin(x - y)]$$

$$\cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x + y) + \cos(x - y)]$$

$$\sin x \sin y = \frac{1}{2} [\cos(x - y) - \cos(x + y)]$$

Maclaurinserier

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots \quad \text{för alla } x$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots \quad \text{för } -1 < x \leq 1$$

$$\arctan x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \quad \text{för } -1 \leq x < \leq 1$$

$$(1+x)^p = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{p}{k} x^k = 1 + px + \frac{p(p-1)}{2!} x^2 + \dots \quad \text{för } -1 < x < 1$$

Stirlings formel

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n) \quad \text{där } \epsilon_n \rightarrow 0 \text{ då } n \rightarrow \infty$$

Fourierserier

Fourierserien med period $2a$ till en funktion f på $[-a, a]$ definieras genom

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi t}{a} + b_k \sin \frac{k\pi t}{a} \right)$$

där

$$a_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(t) \cos \frac{k\pi t}{a} dt, k = 0, 1, 2, \dots$$

och

$$b_k = \frac{1}{a} \int_{-a}^a f(t) \sin \frac{k\pi t}{a} dt, k = 1, 2, \dots$$

Parsevals formel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{a} \int_{-a}^a |f(t)|^2 dt$$

Räkneregler för laplacetransformer

funktion	transform
$f(t)$	$F(s)$
$f'(t)$	$sF(s) - f(0)$
$f^{(n)}(t)$	$s^n F(s) - \sum_{k=1}^n s^{n-k} f^{(k-1)}(0)$
$t^n f(t)$	$(-1)^n F^{(n)}(s)$
$\frac{f(t)}{t}$	$\int_s^{\infty} F(v) dv$
$\int_0^t f(u) du$	$\frac{1}{s} F(s)$
$f(t+p) = f(t)$ för alla t , ($p > 0$)	$\frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t) dt$
$f(t-a)u_a(t)$ där $a > 0$	$e^{-as} F(s)$
$e^{at} f(t)$	$F(s-a)$
$f(at)$ där $a > 0$	$\frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$

Några speciella laplacetransformer

funktion	transform
1	$\frac{1}{s}$
t^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$
t^α	$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}$ där $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x} x^{t-1} dx$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$
$\cos bt$	$\frac{s}{s^2+b^2}$
$\sin bt$	$\frac{b}{s^2+b^2}$
$\cosh bt$	$\frac{s}{s^2-b^2}$
$\sinh bt$	$\frac{b}{s^2-b^2}$
$t \sin bt$	$\frac{2bs}{(s^2+b^2)^2}$
$t \cos bt$	$\frac{s^2-b^2}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{1}{2b^3}(\sin bt - bt \cos bt)$	$\frac{1}{(s^2+b^2)^2}$
$\frac{\sin bt}{t}$	$\arctan \frac{b}{s}$
$\frac{1-\cos bt}{t}$	$\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{b^2}{s^2} \right)$
$u_a(t)$	$\frac{e^{-as}}{s}$
$\delta(t)$	1
$\delta'(t)$	s

z-transformer

I en av formlerna nedan dyker symbolen Θ_{n-k} upp. Den skall tolkas så att den är 0 om $n < k$ och 1 annars.

	x_n	$X(z)$
Dämpning	$a^n x_n$	$X\left(\frac{z}{a}\right)$
Fördröjning	$x_{n-k} \Theta_{n-k}$	$z^{-k} X(z) \quad (k > 0)$
Translation	x_{n+k}	$z^k X(z) - x_0 z^k - x_1 z^{k-1} - \dots - x_{k-1} z \quad (k > 0)$
Faltning	$x_n \star y_n = \sum_{k=0}^n x_{n-k} y_k$	$X(z) Y(z)$
	δ_0	1
	1	$\frac{z}{z-1}$
	a^n	$\frac{z}{z-a}$
	na^{n-1}	$\frac{z}{(z-a)^2}$
	$\binom{n}{m} a^{n-m}$	$\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$
	$\beta^n \cos n\alpha$	$\frac{z^2 - \beta z \cos \alpha}{z^2 - 2\beta z \cos \alpha + \beta^2}$
	$\beta^n \sin n\alpha$	$\frac{\beta z \sin \alpha}{z^2 - 2\beta z \cos \alpha + \beta^2}$