

# Approximation i rum med skalärprodukt

(jfr Lay:6.1-3)

## Projektion

Antag att  $V$  är ett rum med skalärprodukt och att  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_p\}$  är en ortogonal bas för ett underrum  $U$ .

- Det finns för varje  $\mathbf{v}$  i  $V$  en entydig uppdelning

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}} + \mathbf{w}$$

där  $\hat{\mathbf{v}}$  ligger i  $U$  och  $\mathbf{w}$  är ortogonal mot varje vektor i  $U$ .

- Denna vektor  $\hat{\mathbf{v}}$  kallas **ortogonala projektionen** av  $\mathbf{v}$  på  $U$  och har framställningen  $\hat{\mathbf{v}} = c_1\mathbf{u}_1 + \dots + c_p\mathbf{u}_p$  där

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i \rangle} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i \rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \text{ för } i = 1, \dots, p$$

- $\|\mathbf{v}\|^2 = \|\hat{\mathbf{v}}\|^2 + \|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\|^2$
- $\|\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}\| \leq \|\mathbf{v} - \mathbf{u}\|$  för varje vektor  $\mathbf{u}$  i  $U$ , med likhet bara då  $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{v}}$ .