

# Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 25/10-02

1. Funktionen är jämn så inga sinustermer finns med i serien. Vidare gäller då för cosinuscoeffienterna

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

För  $n = 0$  har vi

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) dt = 0$$

medan vi för  $n > 0$  har

$$\frac{pi}{2} a_n = \int_0^{\pi} \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cos nt \, dt.$$

Partiell integration ger här

$$\frac{pi}{2} a_n = \left[ \left(\frac{\pi}{2} - t\right) \cdot \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} (-1) \sin nt \, dt = 0 - 0 - \frac{1}{n} \left[ \frac{\cos nt}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2}.$$

Detta ger att

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Den sökta fourierserien är alltså

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

2. (a) Låt

$$a_n = \frac{x^{2n}}{2^n + 3^n} = \frac{x^{2n}}{3^n((2/3)^n + 1)}.$$

Vi har då

$$\sqrt[n]{a_n} = \frac{x^2}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{((2/3)^n + 1)}} \rightarrow \frac{x^2}{3}$$

då  $n \rightarrow \infty$ . Enligt rotkriteriet är därför serien konvergent om  $x^2/3 < 1$  dvs om  $|x| < \sqrt{3}$  och divergent om  $x^2/3 > 1$  dvs om  $|x| > \sqrt{3}$ . Konvergensraden är alltså  $\sqrt{3}$ .

- (b) För den geometriska serien har vi för  $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

Derivering ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

och en gång till

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

vilket i sin tur ger

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)x^n = \frac{2x^2}{(1-x)^3}.$$

Vi sätter nu in  $x = 1/3$  och får

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)3^{-n} = \frac{2 \cdot 3^{-2}}{(1 - 3^{-1})^3} = \frac{3}{4}.$$

3. Vi har två olika metoder till hands, dels med  $z$ -transform, dels metoden för linjära ekvationer allmänt.

Variant 1 Låt  $Y(z)$  vara  $z$ -transformen av följden  $\{y_n\}$ . Då har följden  $\{y_{n+2}\}$   $z$ -transformen  $z^2 Y(z) - z^2 y_0 - z y_1 = z^2 Y(z) - z^2$ . Eftersom vi har (formelsamlingen)

$$\left\{2^n \frac{n\pi}{2}\right\} \supset \frac{2z}{z^2 + 4}$$

övergår differensekvationen efter  $z$ -transformering i ekvationen

$$(z^2 - 4)Y(z) = \frac{2z}{z^2 + 4} + z^2.$$

Detta innebär att

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2}{(z^2 - 4)(z^2 + 4)} + \frac{z}{z^2 - 4}$$

och vi skall göra parialbråksuppdelning. Vi ser att

$$\frac{2}{(z^2 - 4)(z^2 + 4)} = \frac{1}{4} \frac{1}{z^2 - 4} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^2 + 4}.$$

Eftersom

$$\frac{1}{z^2 - 4} = \frac{1}{4} \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z + 2}$$

har vi alltså

$$\frac{2}{(z^2 - 4)(z^2 + 4)} = \frac{1}{16} \frac{1}{z - 2} - \frac{1}{16} \frac{1}{z + 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^2 + 4}.$$

För den andra termen i uttrycket för  $Y(z)/z$  har vi

$$\frac{z}{z^2 - 4} = \frac{1}{2} \frac{1}{z - 2} + \frac{1}{2} \frac{1}{z + 2}$$

så sammantaget får vi

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{9}{16} \frac{1}{z - 2} + \frac{7}{16} \frac{1}{z + 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{z^2 + 4}$$

dvs

$$Y(z) = \frac{9}{16} \frac{z}{z - 2} + \frac{7}{16} \frac{z}{z + 2} - \frac{1}{4} \frac{z}{z^2 + 4}$$

som leder till att

$$y_n = \frac{9}{16} 2^n + \frac{7}{16} (-2)^n - \frac{1}{8} \cdot 2^n \sin \frac{n\pi}{2}.$$

Detta går också att uttrycka genom att

$$y_n = \begin{cases} 2^n & \text{om } n \text{ är jämnt} \\ 2^{n-3} \cdot \left(1 - \sin \frac{n\pi}{2}\right) & \text{om } n \text{ är udda} \end{cases}$$

Ytterligare omskrivning är möjlig så att

$$y_n = \begin{cases} 2^n & \text{om } n = 4k \text{ eller } n = 4k + 2 \\ 0 & \text{om } n = 4k + 1 \\ 2^{n-2} & \text{om } n = 4k + 3 \end{cases}$$

(Dessa omskrivningar är inte nödvändiga för full poäng.)

Variant 2 Ekvationens karakteristiska ekvation är  $r^2 - 4 = 0$  med rötterna  $r = \pm 2$ . Motsvarande homogena ekvation har alltså den allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A 2^n + B (-2)^n.$$

För att hitta en partikulärlösning utnyttjar vi att

$$\sin \frac{n\pi}{2} = \operatorname{Im} e^{\frac{n\pi i}{2}} = \operatorname{Im} i^n$$

och betraktar istället först ekvationen

$$z_{n+2} - 4z_n = (2i)^n.$$

Här ansätter vi en partikulärlösning på formen

$$z_n = C (2i)^n.$$

Eftersom detta ger  $z_{n+2} = -4C(2i)^n$  får vi en lösning om

$$-8C(2i)^n = (2i)^n$$

dvs om  $C = -1/8$ . Detta ger

$$z_n^{(p)} = -\frac{1}{8} \cdot 2^n i^n = -\frac{1}{8} \cdot 2^n e^{\frac{i\pi n}{2}}.$$

Till den ursprungliga ekvationen får vi därför

$$y_n^{(p)} = -\frac{1}{8} \operatorname{Im} 2^n e^{\frac{i\pi n}{2}} = -\frac{1}{8} \cdot \sin \frac{\pi n}{2}.$$

Den inhomogena ekvationens allmänna lösning är därför

$$y_n = A 2^n + B (-2)^n - \frac{1}{8} \cdot 2^n \sin \frac{\pi n}{2}$$

och vad som återstår är att bestämma koefficienterna så att  $y_0 = 1$  och  $y_1 = 0$ . Detta leder till

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ 2A - 2B - \frac{2}{8} = 0 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ A - B = \frac{1}{8} \end{cases}$$

med lösningen  $A = 9/16$  och  $B = 7/16$ . Fortsättningen blir sedan som i *Variant 1*.

4. Vi observerar att

$$\int_0^t e^{t-u} y(u) du$$

är faltningen av  $e^t$  med  $y(t)$ . När vi laplacetransformerar ekvationen övergår den därför i

$$sY(s) - sy(0) - 2 \cdot \frac{1}{s-1} \cdot Y(s) = e^{-s}.$$

Eftersom  $y(0) = 0$  leder detta till

$$(s(s-1) - 2)Y(s) = (s-1)e^{-s}$$

dvs

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} \cdot e^{-s}.$$

Vi faktorerar  $s^2 - s - 2 = (s+1)(s-2)$  och observerar partialbråksuppdelningen

$$\frac{1}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{3} \frac{1}{s+1} + \frac{1}{3} \frac{1}{s-2}.$$

Detta uttryck är laplacetransform av

$$h(t) = \frac{2}{3} e^{-t} + \frac{1}{3} e^{2t}$$

så

$$Y(s) = \frac{s-1}{s^2-s-2} \cdot e^{-s}$$

är transform av  $h(t-1)u_1(t)$  dvs

$$y(t) = \frac{1}{3} (2e^{-(t-1)} + e^{2(t-1)})u_1(t).$$

5. Tag  $a = 2$  och låt

$$u_n(x) = \frac{\cos nx}{(n^2+1)^2}.$$

(a) För alla reella  $x$  har vi då

$$|u_n(x)| \leq \frac{1}{(n^2 + 1)^2}.$$

Serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n^2 + 1)^2}$$

är konvergent eftersom för  $n = 1, 2, \dots$  har vi

$$\frac{1}{(n^2 + 1)^2} \leq \frac{1}{n^4}$$

och serien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$  är konvergent om  $p > 1$ . Då ger Weierstrass majorantsats att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

konvergerar likformigt på  $I = ] - \infty, \infty[$ . Eftersom varje  $u_n$  är kontinuerlig på  $I$  så är summan av serien det också enligt resultat i kursen.

(b) För att visa summafunktionen är deriverbar på  $I = ] - \infty, \infty[$  räcker det enligt resultat i boken att visa att

- i.  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$  konvergerar punktvis på  $I$ .
- ii. Funktionerna  $u'_n$  är kontinuerliga på  $I$ .
- iii. Serien  $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$  konvergerar likformigt på  $I$ .

Av dessa villkor följer det första av (a), det andra direkt av att cosinusfunktionen har kontinuerlig derivata. Vad som återstår är alltså att visa den likformiga konvergensen i villkor tre. Även här använder vi Weierstrass sats. För  $n = 1, 2, \dots$  har vi uppskattningen

$$|u'_n(x)| = \left| \frac{-n \sin nx}{(n^2 + 1)^2} \right| \leq \frac{n}{(n^2 + 1)^2} \leq \frac{1}{n^3}$$

för alla  $x$  i  $I$ . Även serien  $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-3}$  är konvergent så Weierstrass garanterar likformig konvergens av  $\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x)$  på  $I$ .

Alltså är summan  $f(x)$  deriverbar på  $I$ .

6. (b) Sätt in  $x = 1/z$  i maclaurinserien för  $\sin x$ . Då ser vi att koefficienten framför  $z^{-3}$  är  $-1/3!$  dvs  $y_3 = -1/6$ .

(c) Ta till exempel  $y_n = n^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  och  $y_0$ . I serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y_n}{z^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{z}\right)^n$$

har vi för varje  $z$  att  $n/z \rightarrow \infty$  så serien kan aldrig konvergera.

8 (a) Man skapar en fil *tentafun.m* med följande utseende.

```
function y=tentafun(x);  
y=x.^3-abs(x-1)+exp(2*x);
```

(b) Första raden delar in rektangeln  $0 \leq x \leq 2$ ,  $1 \leq y \leq 3$  i ett rutnät. Sedan räknas i andra raden ut värdena för funktionen  $z = xy - 2x$  i alla noderna. Dessa värden används sedan för att rita ut ytan  $z = xy - 2x$  över rektangeln.