

1. (a)

$$f \star g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t e^{t-u}e^{2u} du = e^t \int_0^t e^u du = e^t(e^t - 1) = e^{2t} - e^t$$

(b) Om $f(t)$ och $g(t)$ har transformerna $F(s)$ respektive $G(s)$ så har faltningen transformen $F(s)G(s)$. Vi har

$$F(s)G(s) = \frac{1}{(s-1)} \cdot \frac{1}{(s-2)} = \frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{(s-1)}.$$

Detta ger

$$f \star g(t) = e^{2t} - e^t$$

2. (a) Vi har

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt dt = \int_{-\pi}^0 (-1) \cos nt dt + \int_0^{\pi} t \cos nt dt, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

respektive

$$\pi b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin nt dt = \int_{-\pi}^0 (-1) \sin nt dt + \int_0^{\pi} t \sin nt dt, \quad n = 1, 2, \dots$$

För $n = 1, 2, \dots$ har vi

$$\int_{-\pi}^0 (-1) \cos nt dt = \left[-\frac{\sin nt}{n} \right]_{-\pi}^0 = 0$$

och

$$\int_{-\pi}^0 (-1) \sin nt dt = \left[\frac{\cos nt}{n} \right]_{-\pi}^0 = \frac{1 - (-1)^n}{n}.$$

Den senare av dessa är alltså 0 för jämna n och $2/n$ för udda n . Vidare har vi för $n = 1, 2, \dots$

$$\int_0^{\pi} t \cos nt dt = \left[\frac{t \sin nt}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nt dt = \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)$$

och

$$\int_0^{\pi} t \sin nt dt = \left[-\frac{t \cos nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nt dt = \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

Sammantaget ger alltså detta att för $n = 1, 2, \dots$ är

$$\pi a_n = 0 + \frac{1}{n^2}((-1)^n - 1)$$

och

$$\pi b_n = \frac{1 - (-1)^n}{n} + \frac{\pi(-1)^{n+1}}{n}.$$

Återstår att bestämma a_0 .

$$\pi a_0 = \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} t dt = -\pi + \frac{\pi^2}{2}$$

dvs

$$a_0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

medan för övriga n gäller

$$a_n = 0 \text{ om } n \text{ jämnt och } a_n = -\frac{2}{\pi n^2} \text{ om } n \text{ udda}$$

och

$$b_n = -\frac{1}{n} \text{ om } n \text{ jämnt och } b_n = \frac{2 + \pi}{\pi n} \text{ om } n \text{ udda}$$

(b) Eftersom funktionen är styckvis kontinuerligt deriverbar är summan i punkten t lika med $(f(t+) + f(t-))/2$ dvs $-1/2, \pi/2$ respektive $(\pi - 1)/2$ i de tre punkterna.

(c) Om vi tar $t = 0$ i fourierserien får vi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = -\frac{1}{2}$$

dvs med värdena för a_n insatta

$$\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = -\frac{1}{2}$$

och alltså

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. (a) Med hjälp av z -transformering får vi

$$z^2 Y(z) - 2z - 6zY(z) + 8Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Eftersom $z^2 - 6z + 8 = (z-2)(z-4)$ har vi

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{2z-5}{(z-2)(z-3)(z-4)} = -\frac{1}{2} \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-3} + \frac{3}{2} \frac{1}{z-4}$$

och alltså

$$Y(z) = \frac{3}{2} \frac{z}{z-4} - \frac{z}{z-3} - \frac{1}{2} \frac{z}{z-2}.$$

Detta ger

$$y_n = \frac{3}{2} \cdot 4^n - 3^n - \frac{1}{2} \cdot 2^n = 6 \cdot 4^{n-1} - 3^n - 2^{n-1}$$

(b) Differentialekvationen har karakteristisk ekvation

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

med rötterna $r = 2$ och $r = 4$. Lösningarna $y_n^{(h)}$ till motsvarande homogena ekvation är alltså

$$y_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n.$$

För en partikulärlösning antar vi $y_n = C \cdot 3^n$ vilket i ekvationen ger

$$C(3^{n+2} - 6 \cdot 3^{n+1} + 8 \cdot 3^n) = 3^n$$

som är uppfyllt om

$$C(9 - 18 + 8) = 1 \text{ dvs } C = -1.$$

Den inhomogena ekvationen har då den allmänna lösningen

$$y_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n - 3^n$$

och det återstår att få villkoren $y_0 = 0$ och $y_1 = 2$ uppfyllda. Det ger $A + B - 1 = 0$ respektive $2A + 4B - 3 = 2$ som har lösningen $A = -1/2$ och $B = 3/2$ vilket leder till samma lösning som i (a).

4. Laplacetransformering av systemet leder till

$$\begin{cases} sX_1 - 1 &= X_1 + 2X_2 \\ sX_2 - 3 &= 2X_1 - 2X_2 \end{cases}$$

dvs

$$\begin{cases} (s-1)X_1 - 2X_2 &= 1 \\ -2X_1 + (s+2)X_2 &= 3 \end{cases}$$

Genom att multiplicera den första ekvationen med $(s+2)$ och den andra med 2 och sedan addera får vi

$$((s+2)(s-1) - 4)X_1 = s + 8$$

dvs

$$(s^2 + s - 6)X_1 = s + 8$$

och alltså

$$X_1 = \frac{s+8}{(s+3)(s-2)} = \frac{2}{s-2} - \frac{1}{s+3}$$

som ger

$$x_1(t) = 2e^{2t} - e^{-3t}.$$

Enklare är nu att se att den första av de ursprungliga ekvationerna ger

$$2x_2(t) = x_1'(t) - x_1(t) = 4e^{2t} + 3e^{-3t} - 2e^{2t} + e^{-3t}$$

och alltså

$$x_2(t) = e^{2t} + 2e^{-3t}$$

5. (a) För alla t gäller

$$\left| \frac{\sin nt}{a^n} \right| \leq \frac{1}{a^n}.$$

Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^n} \text{ är konvergent då } a > 1$$

är den givna serien likformigt konvergent enligt Weierstrass majorantsats. Det innebär bland annat att gränsfunktionen är kontinuerlig.

- (b) Den givna serien är fourierserien för gränsfunktionen, ($a_n = 0$ och $b_n = 1/a^n$). Vi använder Parsevals formel och får eftersom alla $a_n = 0$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^{2n}} = \frac{1}{a^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{a^2}} \text{ geometrisk serie}$$

och alltså

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{\pi}{a^2 - 1}.$$

Kommentar: Den serie som definierar $f(t)$ är imaginärdel av en geometrisk serie vars summa vi kan beräkna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{int}}{a^n} = \frac{1}{1 - e^{it}/a} = \frac{a}{a - e^{it}} = \frac{a}{a - \cos t - i \sin t} = \frac{a(a - \cos t + i \sin t)}{(a - \cos t)^2 + \sin^2 t}$$

vilket alltså ger

$$f(t) = \frac{a \sin t}{a^2 - 2a \cos t + 1}.$$

För del (a) av uppgiften kan ju detta användas men för del (b) är det ingen förenkling att göra det.

6. (a) Exempelvis så här:

```
x=0:0.1:2;y=x.^ 2+ exp(-x);  
plot(x,y)
```

Hur fin indelning man vill ha av intervallet är inte givet utan för var och en att bestämma.

- (b) A=[1,1,1,2,3,4,4,9,16];b=[1;8;27];x=A\b