

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 19/8-03

1. Ekvationen har den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - r - 6 = 0$$

vilken har rötterna $r_1 = 3$ och $r_2 = -2$. Tillhörande homogena differensekvation har alltså allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n.$$

För att hitta en partikulärlösning antar vi $y_n = a \cdot 2^n$. Vi har då en lösning om för alla n gäller

$$a \cdot 2^{n+2} - a \cdot 2^{n+1} - 6a \cdot 2^n = 2^n$$

vilket efter division med 2^n leder till

$$a(4 - 2 - 6) = 1$$

dvs $a = -1/4$. Differensekvationens allmänna lösning är därför

$$y_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n - \frac{1}{4} \cdot 2^n.$$

Vi har $y_0 = 0$ och $y_1 = 1$ precis då

$$\begin{cases} A + B = \frac{1}{4} \\ 3A - 2B = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Detta innebär att $A = 2/5$ och $B = -3/20$. Alltså har vi svaret

$$y_n = \frac{2 \cdot 3^n}{5} - \frac{3 \cdot (-2)^n}{20} - \frac{2^n}{4}.$$

2. (a) Med hjälp av bland annat faltningsatsen får vi

$$F(s) + F(s) \cdot \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{s}{s^2 + 1}$$

dvs vi får

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 2}.$$

- (b) Direkt från formelsamlingen får vi

$$f(t) = \cos t\sqrt{2}$$

3. (a) Vi ser att funktionen är jämn så fourierserien är en cosinusserie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nt$$

där

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt = 2 \int_0^{\pi} f(t) \cos nt \, dt.$$

Vi har här alltså infört beteckningen f för funktionen. Vi ser också att

$$\int_0^{\pi} f(t) \, dt = 0$$

så $a_0 = 0$. För övriga koefficienter behöver vi ett analytiskt uttryck för f

$$f(t) = \frac{1}{\pi}(\pi - 2t).$$

Detta leder till att

$$\frac{\pi^2}{2} \cdot a_n = \int_0^{\pi} (\pi - 2t) \cos nt \, dt$$

som med partiell integration ger

$$\frac{\pi^2}{2} \cdot a_n = \left[(\pi - 2t) \frac{\sin nt}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} 2 \sin nt \, dt = \left[-\frac{2 \cos nt}{n^2} \right]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{1 - \cos n\pi}{n^2}.$$

Av detta följer att

$$a_n = \begin{cases} 0 & \text{om } n \text{ jämnt} \\ \frac{8}{\pi^2} \frac{1}{n^2} & \text{om } n \text{ udda} \end{cases}$$

Den sökta fourierserien är alltså

$$\frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

- (b) Eftersom funktionen är kontinuerlig i $t = 0$ och där har vänster- och högerderivator vet vi att fourierserien för $t = 0$ konvergerar mot $f(0) = 1$. Detta ger

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

- (c) Parsevals formel ger

$$\frac{64}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} (f(t))^2 dt.$$

Här gäller

$$\int_0^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\pi} (\pi - 2t)^2 dt = \frac{1}{6\pi^2} [-(\pi - 2t)^3]_0^{\pi} = \frac{2\pi^3}{6\pi^2} = \frac{\pi}{3}.$$

Vi har därför

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{64} \cdot \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^4}{96}.$$

4. Vi använder laplacetransformering och får

$$(s^2 + 1)Y(s) = F(s) \text{ dvs } F(s) = \frac{F(s)}{s^2 + 1}$$

så problemet reduceras till att först bestämma $F(s)$. Vi kan använda definitionen direkt

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_0^1 (1-t)e^{-st} dt.$$

Vi gör partiell integration och får

$$F(s) = \left[-(1-t) \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 - \frac{1}{s} \int_0^1 e^{-st} dt = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s^2} + \frac{e^{-s}}{s^2}$$

Detta leder till att

$$Y(s) = \frac{1}{ss^2 + 1} - \frac{1}{s^2(s^2 + 1)} + \frac{e^{-s}}{s^2(s^2 + 1)}.$$

Här observerar vi att

$$\frac{1}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2 + 1}$$

vilket också ger

$$\frac{1}{s(s^2 + 1)} = \frac{s}{s^2(s^2 + 1)} = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Sammantaget ger detta att

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 1} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{e^{-s}}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s^2 + 1}.$$

Vi använder nu den generella regeln att $e^{-as}F(s)$ är transform av $u_a(t)f(t-a)$ för att se att

$$y(t) = 1 - \cos t - t + \sin t + u_1(t)(t - 1 - \sin(t-1))$$

eller annorlunda uttryckt

$$y(t) = \begin{cases} 1 - t + \sin t - \cos t & \text{då } t < 1 \\ \sin t - \cos t - \sin(t-1) & \text{då } t > 1 \end{cases}$$

5. Vid z -transformering ger de givna startvärdena $y_0 = c$ och $y_1 = d$ att $\{y_{n+1}\}$ har transformen $zY(z) - cz$ och $\{y_{n+2}\}$ har transformen $z^2Y(z) - cz^2 - dz$. Transformerar vi hela ekvationen får vi därför

$$z^2Y(z) - cz^2 - dz + a(zY(z) - cz) + bY(z) = 0$$

vilket ger

$$(z^2 + az + b)Y(z) = cz^2 + (d + ac)z$$

och alltså

$$Y(z) = \frac{cz^2 + (d + ac)z}{z^2 + az + b}.$$

Eftersom vi vill att

$$Y(z) = \frac{2z^2 + 7z}{z^2 + 3z + 5}$$

ger identifiering av koefficienterna att $a = 3$, $b = 5$, $c = 2$ och $d = 1$.

6. (a) Låt $f_n(x) = n^\alpha x^n(1-x)$. Om $0 \leq x < 1$ gäller $n^\alpha x^n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Om $x = 1$ har vi $f_n(1) = 0$ för alla n . Alltså f_n konvergerar punktvis mot 0 på hela intervallet $[0,1]$.
- (b) Funktionerna f_n är alla kontinuerliga på $[0, 1]$. Eftersom den punktvisa konvergensen ger gränsfunktionen 0 låter vi m_n vara maximala värdet av $|f_n(x) - 0|$ på $[0,1]$ och vet att konvergensen är likformig precis då talföljden $\{m_n\}$ konvergerar mot 0. Eftersom $|f_n(x) - 0| = f_n(x)$ undersöker vi var f_n har sitt maximum på $[0,1]$. Derivering ger att

$$f'_n(x) = n^\alpha(nx^{n-1} - (n+1)x^n)$$

vilket leder till att f_n har sitt maximum i $x = n/(n+1)$ och att alltså

$$m_n = n^\alpha \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \cdot \frac{n}{n+1} = n^{\alpha-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Här gäller

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \cdot \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)} \rightarrow \frac{1}{e}$$

då $n \rightarrow \infty$.

Alltså gäller $m_n \rightarrow 0$ precis då $n^{\alpha-1} \rightarrow 0$ dvs då $\alpha < 1$.

- (c) För $x = 1$ är alla termerna 0 så då är serien konvergent. För $0 \leq x < 1$ använder vi rotkriteriet $|n^\alpha x^n(1-x)|^{1/n} = n^{\alpha/n} \cdot |x| \cdot |1-x|^{1/n} \rightarrow 1 \cdot |x| \cdot 1 = |x|$ så serien konvergerar oavsett värde på α .

Av räkningarna i (b) ser vi att på $[0,1]$ gäller

$$|f_n(x)| \leq m_n = n^{\alpha-1} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1} \leq n^{\alpha-1}.$$

Eftersom $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha-1}$ konvergerar om $\alpha - 1 < -1$ konvergerar alltså den ursprungliga funktionsserien likformigt om $\alpha < 0$ enligt Weierstrass majorantsats.