

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 24/10-03

1. Vi använder laplacetransformering och får

$$(s^2 - 9)Y(s) = \frac{24}{s - 1}$$

dvs

$$Y(s) = \frac{24}{(s - 3)(s + 3)(s - 1)}$$

som efter vanlig partialbråksuppdelning leder till

$$Y(s) = \frac{2}{(s - 3)} + \frac{1}{(s + 3)} - \frac{3}{(s - 1)}$$

och alltså

$$y(t) = 2e^{3t} + e^{-3t} - 3e^t.$$

2. (a) Vi ser att funktionen är jämn så fourierserien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

där

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

För $0 \leq x \leq \pi$ har vi $f(x) = |x| = x$ vilket alltså ger

$$\pi a_n = 2 \int_0^{\pi} x \cos nx \, dx.$$

För $n \neq 0$ kan vi här in tegrera partiellt och få

$$\pi a_n = 2 \left[x \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} - 2 \int_0^{\pi} \frac{\sin nx}{n} \, dx = 2 \left[\frac{\cos nx}{n^2} \right]_0^{\pi} = 2 \cdot \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}.$$

Eftersom $\cos n\pi = (-1)^n$ ger detta att $a_n = 0$ för positiva jämna n medan

$$a_n = -\frac{4}{\pi n^2} \text{ för udda } n.$$

Det återstår att bestämma a_0 . Vi går tillbaka och har alltså

$$\pi a_0 = 2 \int_0^{\pi} x \, dx = \pi^2 \text{ dvs } a_0 = \pi$$

så den sökta fourierserien är

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4}{\pi(2k-1)^2} \cos(2k-1)x = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2}.$$

- (b) Vi tar $x = 0$ i serien och vet att dess summa då blir $f(0) = 0$ eftersom f är kontinuerlig i 0 och styckevis deriverbar. Alltså har vi

$$\frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 0$$

vilket leder till

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

3. (a) Med hjälp av formelsamlingen ser vi att

$$\frac{z^2 - \frac{1}{2}z}{z^2 - z + 1} \subset \left\{ \cos \frac{n\pi}{3} \right\}$$

och att

$$\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}z}{z^2 - z + 1} \subset \left\{ \sin \frac{n\pi}{3} \right\}.$$

Genom att kombinera dessa får vi att

$$\frac{z^2}{z^2 - z + 1} \subset \left\{ \cos \frac{n\pi}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \frac{n\pi}{3} \right\}$$

(b) Vi kan direkt avläsa att

$$y_n = \frac{1}{(n+1)^2}$$

vilket direkt ger $y_3 = 1/16$.

(c) Sinusserien är udda så summan är $-\pi/2$.

(d) Cosinusserien är jämn så summan är $+\pi/2$.

4. Observera att

$$\binom{k+3}{k} = \frac{(k+3)!}{k! \cdot 3!} = \frac{(k+3)(k+2)(k+1)}{6}.$$

Vi använder kriteriet på den serien och med

$$b_k = \binom{k+3}{k} \frac{x^k}{2^k}$$

har vi alltså

$$\left| \frac{b_{k+1}}{b_k} \right| = \frac{(k+4)(k+3)(k+2)}{(k+3)(k+2)(k+1)} \cdot \frac{1}{2} \cdot |x| = \frac{k+4}{k+1} \cdot \frac{|x|}{2}.$$

När vi här låter $k \rightarrow \infty$ får vi gränsvärdet $|x|/2$ vilket enligt kvotkriteriet innebär att serien är konvergent för $|x| < 2$ och divergent för $|x| > 2$. Konvergensraden är alltså 2.

5. Vi använder faltningssatsen för laplacetransformer och vet då med vanliga beteckningarna att

$$Y(s)F(s) = G(s) \text{ dvs } Y(s) = \frac{G(s)}{F(s)}.$$

Funktionen $f(t)$ är periodisk med period 2π , vilket ger

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt.$$

Här ser vi att

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt = \int_0^{\pi} e^{-st} dt - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-st} dt = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s} - \frac{e^{-\pi s} - e^{-2\pi s}}{s}.$$

Detta leder till att

$$\int_0^{2\pi} f(t) e^{-st} dt = \frac{1 - 2e^{-\pi s} + e^{-2\pi s}}{s} = \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s}.$$

Eftersom

$$1 - e^{-2\pi s} = (1 - e^{-\pi s})(1 + e^{-\pi s})$$

har vi alltså

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-2\pi s}} \cdot \frac{(1 - e^{-\pi s})^2}{s} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s(1 + e^{-\pi s})}.$$

Funktionen $g(t)$ kan framställas

$$g(t) = \sin t + \sin t \cdot u_{\pi}(t) = \sin t - \sin(t - \pi) \cdot u_{\pi}(t)$$

vilket leder till att

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} - \frac{e^{-\pi s}}{s^2 + 1} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

För $Y(s)$ har vi därför

$$Y(s) = \frac{G(s)}{F(s)} = \frac{1 - e^{-\pi s}}{s^2 + 1} \cdot \frac{s(1 + e^{-\pi s})}{1 - e^{-\pi s}} = (1 + e^{-\pi s}) \cdot \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Vi har alltså

$$Y(s) = \frac{s}{s^2 + 1} + e^{-\pi s} \cdot \frac{s}{s^2 + 1}.$$

Eftersom

$$\frac{s}{s^2 + 1} \subset \cos t$$

gäller därför

$$y(t) = \cos t + \cos(t - \pi) \cdot u_{\pi}(t) = \cos t - \cos t \cdot u_{\pi}(t).$$

Detta innebär att $y(t) = \cos t$ för $0 < t < \pi$ medan $y(t) = 0$ för $t > \pi$.

6. (a) Eftersom

$$0 \leq \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2 + 1}$$

för alla $x \geq 0$ och serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2 + 1}$$

är konvergent så ger Weierstrass majorantsats att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

konvergerar likformigt på intervallet $0 \leq x < \infty$ och därmed representerar en kontinuerlig funktion där.

(b) Om vi deriverar serien termvis två gånger får vi serierna

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-n)e^{-nx}}{n^2 + 1} \text{ respektive } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{n^2 + 1}.$$

För båda serierna gäller att om $x \geq a$ så har termerna ett absolutbelopp mindre än e^{-na} . Eftersom serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-na}$$

är en geometrisk serie med kvoten mindre än ett om $a > 0$ är den konvergent. Det gör att man får derivatorna av $f(x)$ genom att derivera termvis.

(c) Enligt (b) har vi

$$f''(x) + f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 e^{-nx}}{n^2 + 1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n^2 + 1)e^{-nx}}{n^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}.$$

Den senare serien är alltså en geometrisk serie med kvoten e^{-x} . Alltså har vi

$$f''(x) + f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

för $x > 0$.

8. Den karakteristiska ekvationen

$$r^2 - r - 6 = 0$$

har rötterna 3 respektive -2. Alltså har motsvarande homogena ekvation lösningen

$$y_n^h = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n.$$

För att hitta en partikulärlösning till den givna inhomogena ekvationen observerar vi först att

$$\cos \frac{n\pi}{2} = \operatorname{Re} e^{i\frac{n\pi}{2}} = \operatorname{Re} \left(e^{i\frac{\pi}{2}} \right)^n = \operatorname{Re} i^n.$$

Vi söker därför istället en partikulärlösning z_n^p till

$$z_{n+2} - z_{n+1} - 6z_n = i^n$$

varefter $y_n^p = \operatorname{Re} z_n^p$. Ansätt $z_n = a \cdot i^n$. Vi sätter in i differensekvationens vänsterled vilket ger

$$z_{n+2} - z_{n+1} - 6z_n = a(i^2 - i - 6)i^n = a(-7 - i)i^n$$

som visar att vi har en lösning till differensekvationen om

$$a = \frac{1}{-7 - i} = -\frac{7 - i}{50} = \frac{i - 7}{50}.$$

Alltså är

$$z_n^p = \frac{(i - 7)i^n}{50} = \frac{(i - 7)e^{i\frac{n\pi}{2}}}{50} = \frac{(i - 7)(\cos \frac{n\pi}{2} + i \sin \frac{n\pi}{2})}{50}.$$

Genom att ta realdelen av denna lösning får vi

$$y_n^p = -\frac{7 \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}}{50}$$

så den allmänna lösningen till den givna differensekvationen är

$$y_n = A \cdot 3^n + B \cdot (-2)^n - \frac{7 \cos \frac{n\pi}{2} + \sin \frac{n\pi}{2}}{50}.$$

Villkoren $y_0 = y_1 = 0$ svarar mot

$$\begin{cases} A + B = \frac{7}{50} \\ 3A - 2B = \frac{1}{50} \end{cases}$$

Detta leder till $A = 3/50$ och $B = 4/50$ så den sökta lösningen är

$$y_n = \frac{3^{n+1} + (-2)^n - 7 \cos \frac{n\pi}{2} - \sin \frac{n\pi}{2}}{50}.$$