

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 17/1-04

1. Karakteristisk ekvation är

$$r^2 - r - 2 = 0$$

med rötterna 2 och -1. Den tillhörande homogena ekvationen har därför allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

För att hitta en partikulärlösning till ekvationen antar vi $y_n = a \cdot n2^n$ vilket leder till

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = a \cdot (n+2)2^{n+2} - a \cdot (n+1)2^{n+1} - 2a \cdot n2^n = a \cdot (4n+8-2n-2-2n)2^n = 6a2^n$$

så vi har en lösning om $a = 1/6$.

Den givna ursprungliga ekvationen har alltså lösningen

$$y_n = \frac{n2^n}{6} + A \cdot 2^n + B \cdot (-1)^n$$

där A och B är godtyckliga konstanter.

2. (a) Vi ser att funktionen är jämn så fourierserien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

där

$$\pi a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = 2 \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx.$$

Funktionens utseende gör att vi får

$$\pi a_n = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} \cos nx \, dx$$

För $n \neq 0$ integrerar vi och får

$$\pi a_n = 2 \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_{\pi/2}^{\pi} = -2 \cdot \frac{\sin n\frac{\pi}{2}}{n}.$$

Detta ger $a_n = 0$ för positiva jämna n medan för udda $n = 2k - 1$ har vi

$$\pi a_{2k-1} = -2 \cdot \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = -2 \cdot \frac{\sin(-1\frac{\pi}{2} + k\pi)}{2k-1} = \frac{2(-1)^k}{2k-1}.$$

För $n = 0$ har vi

$$\pi a_0 = 2 \int_{\pi/2}^{\pi} 1 \, dx = \pi$$

dvs $a_0 = 1$. Den sökta fourierserien är alltså

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} \cos(2k-1)x.$$

- (b) Eftersom $f(x)$ är styckevis kontinuerlig och deriverbar, kontinuerlig i $x = 0$ får vi genom att ta $x = 0$ i serien att

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = f(0) = 0$$

dvs

$$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k-1} = -\frac{1}{2}$$

och alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

(c) Parsevals formel ger att

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_{\pi/2}^{\pi} 1 dx = 1.$$

När vi sätter in koefficienterna från (a) får vi därför

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = 1$$

vilket i sin tur ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

3. Eftersom $y_1'(t) \subset sY_1(s) - y_1(0) = sY_1(s)$ och $y_2'(t) \subset sY_2(s) - y_2(0) = sY_2(s) - 1$ övergår systemet i

$$\begin{cases} sY_1 &= 2Y_2 \\ sY_2 - 1 &= -2Y_1 \end{cases}.$$

Här löser vi ut Y_2 i den första ekvationen och stoppar in i den andra och får

$$\begin{cases} Y_2 &= \frac{s}{2} Y_1 \\ s^2 Y_1 - 2 &= -4Y_1 \end{cases}.$$

vilket först ger

$$Y_1 = \frac{2}{s^2 + 4}$$

och sedan

$$Y_2 = \frac{s}{2} Y_1 = \frac{s}{s^2 + 4}.$$

Det innebär när vi går tillbaka till funktioner att $y_1(t) = \sin 2t$ och $y_2(t) = \cos 2t$.

4. Vi använder kvotkriteriet som säger att om

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = A$$

så är serien $\sum a_n$ konvergent om $A < 1$ och divergent om $A > 1$.

(a) Här använder vi kvotkriteriet med

$$a_n = \frac{x^n}{3^n + 1}$$

vilket ger

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|}{(3^n + 1)^{1/n}} = \frac{|x|}{3} \cdot \frac{1}{(1 + 3^{-n})^{1/n}} \rightarrow \frac{|x|}{3}$$

då $n \rightarrow \infty$. Serien är alltså konvergent om $|x| < 3$ och divergent om $|x| > 3$. Konvergensraden är därmed 3.

(b) Här använder vi

$$a_n = \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

som ger

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{|x|^n}{2} \rightarrow \begin{cases} \infty & , \text{om } |x| > 1 \\ 0.5 & , \text{om } |x| = 1 \\ 0 & , \text{om } |x| < 1 \end{cases}$$

Serien är alltså konvergent för $|x| \leq 1$ och divergent för $|x| > 1$. Konvergensraden är därmed 1.

5. Vi använder z -transformen och observerar först att följden $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ har z -transformen

$$D(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d_n}{z^n} = 1 - \frac{2}{z} = \frac{z-2}{z}.$$

Låter vi $Y(z)$ som vanligt vara z -transformen av $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ så har $\{y_{n+1}\}_{n=0}^{\infty}$ transformen $zY(z) - zy_0 = zY(z) - z$ och medan $\{y_{n+2}\}_{n=0}^{\infty}$ har transformen $z^2Y(z) - z^2y_0 - zy_1 = z^2Y(z) - z^2 - 2z$. Differensekvationen övergår därför i

$$z^2Y(z) - z^2 - 2z - 5(zY(z) - z) + 6Y(z) = \frac{z-2}{z}$$

dvs

$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = z^2 - 3z + \frac{z-2}{z}.$$

Eftersom $z^2 - 5z + 6 = (z-2)(z-3)$ leder detta till

$$Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{1}{z(z-3)}.$$

Här har vi

$$\frac{z}{z-2} \supset \{2^n\}_{n=0}^\infty$$

och

$$\frac{1}{z(z-3)} = \frac{1}{z^2} \cdot \frac{z}{z-3} \supset T_2\{3^n\}_{n=0}^\infty = \begin{cases} 0 & , \text{ om } n = 0, 1 \\ 3^{n-2} & , \text{ om } n \geq 2 \end{cases}.$$

Detta ger

$$y_n = \begin{cases} 2^n & , \text{ om } n = 0, 1 \\ 2^n + 3^{n-2} & , \text{ om } n \geq 2 \end{cases}.$$

6. (a) Skall funktionsföljden konvergera punktvis på $[0, 1]$ måste den göra det speciellt i punkten $x = 1$. I denna punkt är $f_n(1) = n^a/(n^2 + 1)$ som konvergerar mot ett ändligt värde bara om $a \leq 2$. Vi behöver alltså bara undersöka sådana a -värden. Vi ser att $f_n(0) = 0$ för alla n så i punkten $x = 0$ konvergerar följden alltid mot 0. För $x \neq 0$ har vi

$$\frac{n^a x}{n^2 x^2 + 1} = \frac{n^{a-2} x}{x^2 + n^{-2}}.$$

Om $a < 2$ har vi därför $f_n(x) \rightarrow 0$ för alla x i $[0, 1]$. Är däremot $a = 2$ har vi

$$f_n(x) = \frac{x}{x^2 + n^{-2}} \rightarrow \frac{1}{x}$$

då $x \neq 0$.

Konsekvensen är alltså att funktionsföljden konvergerar punktvis på $[0, 1]$ om och endast om $a \leq 2$.

- (b) För $a < 2$ är gränsfunktionen $f(x) = 0$ på hela $[0, 1]$ enligt (a) och alltså kontinuerlig. För $a = 2$ är gränsfunktionen $f(x) = 1/x$ på $]0, 1]$ medan $f(0) = 0$ och är därmed inte kontinuerlig på $[0, 1]$. Gränsfunktionen $f(x)$ är alltså kontinuerlig på $[0, 1]$ om och endast om $a < 2$.
- (c) Om funktionsföljden konvergerar likformigt på $[0, 1]$ så är gränsfunktionen kontinuerlig, så $a < 2$ är ett nödvändigt villkor. För $a < 2$ har vi på $[0, 1]$ att

$$|f_n(x) - f(x)| = |f_n(x) - 0| = f_n(x).$$

Vi bestämmer därför maximum av $f_n(x)$ på $[0, 1]$ och börjar med att beräkna $f'_n(x)$

$$f'_n(x) = n^a \cdot \frac{1 \cdot (n^2 x^2 + 1) - x \cdot (2n^2 x)}{(n^2 x^2 + 1)^2} = n^a \cdot \frac{1 - n^2 x^2}{(n^2 x^2 + 1)^2}$$

vilket visar att $f_n(x)$ har maximum i $x = 1/n$. Alltså är maximum av $|f_n(x) - f(x)|$ på $[0, 1]$ lika med

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^{a-1}}{2}.$$

Eftersom funktionsföljden konvergerar likformigt om och endast om maximum av $|f_n(x) - f(x)|$ på $[0, 1]$ konvergerar mot 0, har vi därför likformig konvergens om och endast om $a < 1$.

8. Genom att sätta in $t = 0$ i ekvationen ser vi att vi måste ha $y(0) = 0$. Vi laplacetransformerar ekvationen och får med hjälp av bl a faltningssatsen

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} + Y(s) \cdot \frac{1}{s^2}$$

vilket leder till

$$Y(s) = \frac{s^2 - 1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{1}{s^2 - 1} = \frac{1}{(s-1)(s+1)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s-1)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(s+1)} = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t.$$