

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 17/8-04

1. Två fall uppkommer, ett om $a \neq 2$ ett annat om $a = 2$.

Om $a \neq 2$ så är allmänna lösningen till differensekvationen $y_n = A \cdot 2^n + B \cdot a^n$. När man kontrollerar villkoren $y_0 = 0$ och $y_1 = 1$ får man villkoren $A + B = 0$ och $2A + aB = 1$ som leder till

$$y_n = \frac{2^n - a^n}{2 - a}.$$

Om $a = 2$ är allmänna lösningen $y_n = (An + B) \cdot 2^n$ och de båda villkoren leder till att $B = 0$ och $A = 1/2$ varför

$$y_n = n2^{n-1}.$$

2. (a) Vi använder rotkriteriet och låter

$$a_k = \frac{x^{2k}}{3^k + 1}.$$

Då gäller

$$|a_k|^{1/k} = \frac{x^2}{(3^k + 1)^{1/k}} = \frac{x^2}{(3^k)^{1/k}} = \frac{x^2}{3(1 + 3^{-k})^{1/k}} \rightarrow \frac{x^2}{3}$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien är alltså konvergent om detta gränsvärde är mindre än ett och divergent om det är större än ett. Detta ger att konvergensradien är $\sqrt{3}$

- (b) Här låter vi

$$a_k = \frac{k!}{(2k)!} \cdot x^k$$

och använder kvotkriteriet. Vi observerar att

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{(k+1)!}{(2k+2)!} \cdot \frac{(2k)!}{k!} \cdot |x| = \frac{k+1}{(2k+1)(2k+2)} \cdot |x| \rightarrow 0$$

då $k \rightarrow \infty$. Serien är alltså konvergent för alla x . Konvergensradien är alltså oändlig.

3. Problemet handlar om att utveckla funktionen $f(t) = \pi/4$ i en sinusserie på intervallet $[0, \pi]$. Denna utveckling är

$$f(t) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kt$$

där

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \sin kt \, dt.$$

I vårt fall leder detta till

$$b_k = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin kt \, dt = \frac{1}{2k} [-\cos kt]_0^{\pi} = \frac{1}{2k} (1 - \cos k\pi).$$

som i sin tur ger att

$$b_k = 0 \text{ om } k \text{ jämnt, och } b_k = \frac{2}{2k} = \frac{1}{k} \text{ om } k \text{ udda.}$$

Alltså har vi

$$f(t) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \sin (2n+1)t.$$

Eftersom $f(t) = \pi/4$ är såväl kontinuerlig som deriverbar på $0 < t < \pi$ har vi i själva verket likhet för dessa t . Den givna likheten är alltså bevisad.

4. (a) För funktionen, $f(t)$, i figuren gäller att $f(t) = 0$ för $t > p$ och att

$$f(t) = \frac{k}{p}(p-t) \text{ då } 0 \leq t \leq p.$$

Definitionen av laplacetransform ger därför

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} \, dt = \int_0^p f(t)e^{-st} \, dt.$$

Genom partiell integration får vi

$$F(s) = \frac{1}{s} [-f(t)e^{-st}]_0^p + \frac{1}{s} \int_0^p f'(t)e^{-st} dt$$

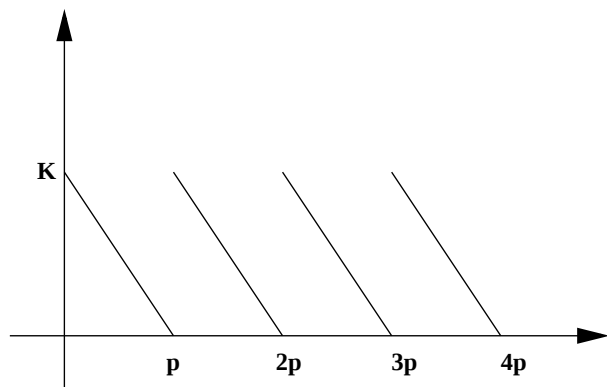
dvs

$$F(s) = \frac{k}{s} + \frac{1}{s} \int_0^p \left(-\frac{k}{p}\right) \cdot e^{-st} dt = \frac{k}{s} - \frac{k}{ps^2} \cdot (1 - e^{-ps}) = \frac{k}{ps^2} (e^{-ps} - 1 + ps).$$

(b) Eftersom vi i detta fall har

$$F(s) = \int_0^p f(t)e^{-st} dt$$

svarar $F(s)/(1 - e^{-ps})$ mot den periodiska fortsättningen av $f(t)$ på $[0, p]$ till hela positiva reella axeln. Figuren är alltså



5. (b) Vi börjar med att bestämma z -transformerna av de två följderna och utnyttjar serieutvecklingen exponentialfunktionen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = e^t.$$

Vi har med hjälp av denna

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2/z)^n}{n!} = e^{2/z}.$$

På samma sätt har vi

$$Y(z) = e^{3/z}.$$

Enligt faltningssatsen har $\{x_n\} \star \{y_n\}$ z -transformen $X(z)Y(z)$. Men

$$X(z)Y(z) = e^{2/z} \cdot e^{3/z} = e^{5/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5^n}{n!} \cdot \frac{1}{z^n}$$

så

$$\{x_n\} \star \{y_n\} = \left\{ \frac{5^n}{n!} \right\}$$

(c) Låt $\{x_n\} \star \{y_n\} = \{u_n\}$. Då gäller

$$u_n = \sum_{k=0}^n x_{n-k} y_k = \sum_{k=0}^n \frac{2^{n-k}}{(n-k)!} \cdot \frac{3^k}{k!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{(n-k)!k!} 2^{n-k} 3^k = \frac{1}{n!} (2+3)^n = \frac{5^n}{n!}.$$

6. Med Parsevals formel får vi

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{2^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\sqrt{n}}{2^n} \right)^2 = 2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n}.$$

För att beräkna denna series summa kan vi utgå ifrån geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

derivera och få

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

vilket ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

Med $x = 1/4$ ger detta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{4^n} = \frac{4}{9}$$

och slutligen

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \pi \left(2 + \frac{4}{9} \right) = \frac{22\pi}{9}$$

7. **(Tilläggsuppgiften.)** Laplacetransformering ger

$$sY(s) - y(0) + Y(s) = F(s)$$

dvs

$$(s+1)Y(s) = F(s) + 1$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{F(s)}{s+1} + \frac{1}{s+1}$$

vilket med $F(s)$ är

$$Y(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} + \frac{1}{s+1}.$$

Här vet vi att

$$\frac{1}{s^2+1} \subset \sin t$$

vilket innebär att

$$\frac{e^{-\pi s}}{s^2+1} \subset \sin(t-\pi)u_{\pi}(t) = -u_{\pi}(t)\sin t.$$

Eftersom dessutom

$$\frac{1}{s+1} \subset e^{-t}$$

har vi

$$y(t) = e^{-t} - u_{\pi}(t)\sin t$$

dvs $y(t) = e^{-t}$ då $0 \leq t < \pi$ medan $y(t) = e^{-t} - \sin t$ då $t \geq \pi$.