

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 22/10-04

1. Karakteristisk ekvation är

$$r^2 - 5r + 6 = 0$$

med rötterna 2 och 3. Den tillhörande homogena ekvationen har därför allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$

För att hitta en partikulärlösning till ekvationen antar vi $y_n = a \cdot n2^n$ vilket leder till

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = a \cdot (n+2)2^{n+2} - 5a \cdot (n+1)2^{n+1} + a \cdot n2^n = a2^n \cdot (4n+8-10n-10+6n)2^n = -2a2^n.$$

Detta ger en partikulärlösning om vi tar $a = -1/2$, dvs $y_n^{(p)} = -n2^{n-1}$ och den allmänna lösningen är

$$y_n = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n - n2^{n-1}.$$

2. (a) Låt $f(x)$ vara den givna funktionen. Observera att funktionen är jämn så alla sinustermerna i fourierserien försvinner och för cosinusoefficienterna har vi

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

där

$$f(x) = 1 - \frac{x}{\pi} \text{ för } 0 \leq x \leq \pi.$$

För $k \neq 0$ kan vi genomföra räkningar med partiell integration enligt följande.

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^\pi f(x) \cos kx \, dx = \left[f(x) \cdot \frac{\sin kx}{k} \right]_0^\pi - \frac{1}{k} \int_0^\pi f'(x) \sin kx \, dx = 0 - \frac{1}{k} \int_0^\pi \left(-\frac{1}{\pi}\right) \sin kx \, dx$$

dvs

$$\frac{\pi}{2} a_k = -\frac{1}{\pi k} \left[\frac{\cos kx}{k} \right]_0^\pi = \frac{1 - \cos k\pi}{\pi k^2}.$$

Detta leder till att $a_k = 0$ för $k = 2, 4, 6, \dots$ medan

$$a_k = \frac{4}{\pi^2 k^2} \text{ för } k = 1, 3, 5, \dots$$

Återstår att beräkningar för $k = 0$. Men i detta fall har vi

$$\frac{\pi}{2} a_0 = \int_0^\pi f(x) \, dx = \left[x - \frac{x^2}{2\pi} \right]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$$

och alltså $a_0 = 1$

Om vi sedan skriver de udda k -värdena som $k = 2n+1$ för $n = 0, 1, 2, \dots$ har vi alltså följande fourierserie för den givna funktionen

$$f(x) \sim \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos(2n+1)x}{(2n+1)^2}$$

- (b) Funktionen är kontinuerlig och styckvis deriverbar så för alla x i intervallet $] -\pi, \pi[$ konvergerar serien mot $f(x)$. Speciellt för $x = 0$ har vi då

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

vilket ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

För den andra serien använder vi Parsevals formel som säger att

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 \, dx.$$

För vår funktion gäller

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^2 dx = \frac{2}{\pi} \left[-\frac{\pi}{3} \left(1 - \frac{x}{\pi}\right)^3 \right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}.$$

I Parsevals formel får vi därför

$$\frac{1}{2} + \frac{16}{\pi^4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{2}{3}$$

och alltså

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

3. Laplacetransformering med de vanliga beteckningarna ger

$$s^2 Y(s) + Y(s) = X(s)$$

dvs

$$Y(s) = \frac{X(s)}{s^2 + 1}.$$

Här gäller

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \int_0^1 (1-t)e^{-st} dt.$$

Genom partiell integration ser vi

$$\int_0^1 (1-t)e^{-st} dt = \left[-(1-t) \frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 + \frac{1}{s} \int_0^1 (-1)e^{-st} dt = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} \left[\frac{e^{-st}}{s} \right]_0^1 = \frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2}$$

dvs

$$X(s) = \frac{1}{1 - e^{-s}} \left(\frac{1}{s} + \frac{e^{-s} - 1}{s^2} \right) = \frac{1}{s(1 - e^{-s})} - \frac{1}{s^2}$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{1}{(1 - e^{-s})s(s^2 + 1)} - \frac{1}{s^2(s^2 + 1)}.$$

4. (a) Låt

$$c_n = \frac{n^2}{3^n}.$$

Då gäller

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)^2}{3^{n+1}} \cdot \frac{3^n}{n^2} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1}{3} < 1.$$

Kvotkriteriet ger därför att serien är konvergent.

(b) Vi försöker bestämma summan av serien $\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n$ och sätter sedan i denna in $x = 1/3$.

För $|x| < 1$ har vi summan för en geometrisk serie

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}.$$

För dessa x kan vi derivera och få

$$\sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

och efter att ha multiplicerat med x på båda sidor och sedan ytterligare en derivering har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{d}{dx} \left(\frac{x}{(1-x)^2} \right) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2x}{(1-x)^3}.$$

Här multiplicerar åter med x på båda sidor och får

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n = \frac{x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{x + x^2}{(1-x)^3}.$$

Med $x = 1/3$ får vi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{3^n} = \frac{3}{2}$$

5. Här använder vi z -transformering och får enligt faltningssatsen

$$X(z) + \frac{z}{z-4}X(z) = \frac{z}{z-a}$$

dvs

$$\frac{2(z-2)}{z-4}X(z) = \frac{z}{z-a}$$

och alltså

$$X(z) = \frac{z}{2} \cdot \frac{z-4}{(z-2)(z-a)}.$$

Här uppkommer två olika situationer beroende på om $a = 2$ eller $a \neq 2$.

För $a = 2$ har vi

$$X(z) = \frac{z}{2} \cdot \frac{z-4}{(z-2)^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{(z-2)} - \frac{2z}{(z-2)^2} \right).$$

Detta ger

$$x_n = \frac{1}{2} (2^n - n2^{n-1}) = (1-n)2^{n-1}.$$

För $a \neq 2$ börjar vi med partialbråksuppdelningen

$$\frac{z-4}{(z-2)(z-a)} = \frac{A}{z-2} + \frac{B}{z-a}.$$

"Handpåläggning" ger

$$A = \frac{2}{a-2} \text{ och } B = \frac{a-4}{a-2}$$

dvs

$$X(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{a-2} \cdot \frac{z}{z-2} + \frac{a-4}{a-2} \frac{z}{z-a} \right)$$

vilket ger

$$x_n = \frac{2^n}{a-2} + \frac{(a-4)a^n}{2(a-2)} = \frac{a^n}{2} - \frac{a^n - 2^n}{a-2}.$$

6. Det räcker att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \text{ där } u_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^2}$$

konvergerar likformigt på hela reella tallinjen. Med sikte mot att använda Weierstrass majorantsats undersöker vi maximum av $|u_n(x)|$. Eftersom $u_n(x)$ är en udda funktion räcker det att söka maximum av $|u_n(x)|$ för $x \geq 0$, men där gäller i detta fall $|u_n(x)| = u_n(x)$. Vi deriverar och får

$$u'_n(x) = \frac{1 \cdot (n^3 + x^2) - x \cdot 2x}{(n^3 + x^2)^2} = \frac{n^3 - x^2}{(n^3 + x^2)^2}.$$

Här ser vi att derivatan är 0 då $x = n^{3/2}$ och derivatans teckenväxling i denna punkt visar att detta x -värde ger maximum av $u_n(x)$. För alla x gäller därför olikheten

$$|u_n(x)| \leq \frac{n^{3/2}}{n^3 + n^3} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerar om $p > 1$ ser vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$$

konvergerar. Därmed ger Weierstrass sats att den ursprungliga serien konvergerar likformigt på hela tallinjen och att alltså gränsfunktionen $s(x)$ är kontinuerlig för alla x .

7. (b) Enligt definitionen får vi

$$f \star g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u) du = \int_0^t 1 \cdot u du = \frac{t^2}{2}.$$

8. (a) Låt

$$c_n = \frac{(2n)!}{(n!)^2} x^{2n-1}.$$

Då gäller

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{(2(n+1))! |x|^{2n+1}}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{(n!)^2}{(2n)! |x|^{2n-1}} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \cdot |x|^2 = \frac{2(2n+1)}{n+1} \cdot |x|^2 \rightarrow 4|x|^2$$

då $n \rightarrow \infty$. Enligt kvotkriteriet konvergerar serien om detta gränsvärde är mindre än 1 och divergerar om det är större än 1. Alltså är konvergensradien $1/2$.

(b) Låt i detta fall

$$c_n = \frac{n^n x^n}{n!}.$$

Av Stirlings formel vet vi att

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} (1 + \epsilon_n)$$

där $\epsilon_n \rightarrow 0$ då $n \rightarrow \infty$. Detta leder till att

$$|c_n|^{1/n} = \frac{e|x|}{(\sqrt{2\pi n}(1 + \epsilon_n))^{1/n}} \rightarrow e|x|$$

då $n \rightarrow \infty$. Rotkriteriet ger då att serien konvergerar om $e|x| < 1$ och divergerar om $e|x| > 1$. Konvergensradien är därför $1/e$.