

Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 13/1-05

1. Karakteristisk ekvation är

$$r^2 - 6r + 8 = 0$$

med rötterna 2 och 4. Den tillhörande homogena ekvationen har därför allmänna lösningen

$$y_n^{(h)} = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n$$

För att hitta en partikulärlösning till ekvationen antar vi $y_n = a \cdot n2^n$ vilket leder till

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = a \cdot (n+2)2^{n+2} - 6a \cdot (n+1)2^{n+1} + 8a \cdot n2^n = a2^n \cdot (4n+8-12n-12+8n)2^n = -4a2^n.$$

Detta ger en partikulärlösning om vi tar $a = -1/4$, dvs $y_n^{(p)} = -n2^{n-2}$ och den allmänna lösningen är

$$y_n = A \cdot 2^n + B \cdot 4^n - n2^{n-2}.$$

För att de två begynnelsevärdena skall vara uppfyllda krävs nu att $A + B = 0$ och $2A + 4B - 0.5 = 1$. Detta inträffar precis då $A = -3/4$ och $B = 3/4$ dvs

$$y_n = 3 \cdot 4^{n-1} - (3+n) \cdot 2^{n-2}$$

2. Laplacetransformering med de vanliga beteckningarna ger

$$(s^2 + 1)Y(s) = \frac{5}{(s+1)^2 + 1}$$

dvs

$$Y(s) = \frac{5}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 2)}.$$

Här gör vi partialbråsuppdelningen

$$\frac{5}{(s^2 + 1)(s^2 + 2s + 2)} = \frac{As + B}{s^2 + 1} + \frac{Cs + D}{s^2 + 2s + 2}$$

som efter multiplikation med vänsterledets nämnare svarar mot

$$5 = (As + B)(s^2 + 2s + 2) + (Cs + D)(s^2 + 1)$$

dvs

$$5 = (A + C)s^3 + (2A + B + D)s^2 + (2A + 2B + C)s + 2B + D.$$

Identifiering av koefficienterna ger så småningom $A = -2$, $B = 1$, $C = 2$ och $D = 3$ dvs

$$Y(s) = \frac{2s+3}{s^2+2s+2} - \frac{2s-1}{s^2+1} = 2 \cdot \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} - 2 \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1}.$$

Detta ger

$$y(t) = e^{-t}(2 \cos t + \sin t) - 2 \cos t + \sin t$$

3. (a) Vi har

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \sin x \cos kx \, dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

vilket genom trigonometriska formler kan skrivas

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\sin(k+1)x - \sin(k-1)x) \, dx.$$

För $k = 1$ ger detta

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin 2x \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos 2x}{2} \right]_0^\pi = 0.$$

För $k \neq 1$ får vi

$$a_k = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos(k+1)x}{(k+1)} + \frac{\cos(k-1)x}{(k-1)} \right]_0^\pi = \frac{1 - \cos(k+1)\pi}{\pi(k+1)} - \frac{1 - \cos(k-1)\pi}{\pi(k-1)}$$

och alltså

$$a_k = \frac{(1 + (-1)^k)}{\pi} \left(\frac{1}{1+k} - \frac{1}{k-1} \right)$$

vilket ger att $a_k = 0$ om k är udda och

$$a_k = -\frac{4}{\pi(k^2 - 1)} \text{ om } k \text{ är jämnt.}$$

Speciellt ger detta $a_0 = 4/\pi$. Den sökta cosinusserien är därför

$$\sin x \sim \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2nx}{4n^2 - 1}.$$

- (b) Cosinusserieutvecklingen av $\sin x$ svarar mot fourierserieutveckling av den jämna fortsättningen av $\sin x$ dvs $|\sin x|$. Genom att ta $x = 0$ i serien får vi därför

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = 0$$

vilket ger

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

- (c) Parsevals formel ger

$$\frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (1 - \cos 2x) \, dx = 1.$$

Alltså får vi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n^2 - 1)^2} = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}.$$

4. (a) Låt

$$c_n = \frac{n!}{n^n} x^{2n+1}.$$

Då gäller

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!} \cdot \frac{|x|^{2n+3}}{|x|^{2n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} \cdot |x|^2 = \frac{1}{(1+1/n)^n} \cdot |x|^2 \rightarrow \frac{|x|^2}{e}$$

då $n \rightarrow \infty$. Eftersom serien enligt kvotkriteriet är konvergent om detta gränsvärde är mindre än ett och divergent om gränsvärdet är större än ett så är konvergensradien $\sqrt{e}$.

- (b) Med

$$c_n = n^n x^{n^2}$$

har vi

$$|c_n|^{1/n} = n|x|^n \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{om } |x| < 1 \\ \infty & \text{om } |x| \geq 1 \end{cases}$$

då $n \rightarrow \infty$. Rotkriteriet ger alltså att serien är konvergent om $|x| < 1$ och divergent om $|x| \geq 1$. Konvergensradien är därför 1.

5. Låt $X(z)$ och $Y(z)$ vara z -transformerna av respektive följd. Då gäller sambandet $Y(z) = H(z)X(z)$ dvs $H(z) = Y(z)/X(z)$. Ur formelsamlingen kan vi utläsa att

$$X(z) = \frac{z}{z-2} \text{ och } Y(z) = \frac{2z\sqrt{3}/2}{z^2 - 2z + 4}$$

vilket alltså leder till

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \sqrt{3} \cdot \frac{z-2}{z^2 - 2z + 4}.$$

Vi har då alltså bland annat använt att

$$\left\{ 2^n \sin \frac{n\pi}{3} \right\} \sim \frac{z\sqrt{3}}{z^2 - 2z + 4}.$$

Detta leder till att

$$T_1\{2^n \sin \frac{n\pi}{3}\} \sim \frac{\sqrt{3}}{z^2 - 2z + 4}.$$

Vi har därför $H(z) \sim \{h_n\}$ där

$$h_n = 2^n \sin \frac{n\pi}{3} - 2^n \sin \frac{(n-1)\pi}{3} \text{ för } n = 1, 2, \dots$$

medan $h_0 = 0$.

6. Vi använder definitionen av laplacetransform:

$$F(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt = \sum_{n=1}^\infty \int_{n-1}^n \frac{1}{n} e^{-st} dt = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n} \cdot \frac{e^{-s(n-1)} - e^{-sn}}{s} = \frac{e^s - 1}{s} \sum_{n=1}^\infty \frac{e^{-sn}}{n}.$$

Vi kan här utnyttja potensserieutvecklingen

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^\infty \frac{x^n}{n} \text{ för } |x| < 1$$

med $x = e^{-s}$. Detta leder till att

$$F(s) = \frac{(e^s - 1) \ln(1 - e^{-s})^{-1}}{s}.$$

7. (d) Enligt faltningssatsen har den sökta faltningen z -transformen

$$\left(1 + \frac{2}{z} + \frac{3}{z^2}\right) \left(4 + \frac{5}{z}\right) = 1 + \frac{2 \cdot 4 + 1 \cdot 5}{z} + \frac{2 \cdot 5 + 3 \cdot 4}{z^2} + \frac{3 \cdot 5}{z^3} = 1 + \frac{13}{z} + \frac{22}{z^2} + \frac{15}{z^3}.$$

Den sökta transformen är alltså 1, 13, 22, 15, 0, 0, 0, ...

8. Eftersom $f(x) = x$ är en udda funktion på $[-1, 1]$ har denna en fourierserieutveckling av formen

$$x \sim \sum_{n=1}^\infty b_n \sin n\pi x.$$

För att minimera den givna integralen skall man då välja $a = b_1$ och $b = b_2$, så det är dessa två koefficienter vi behöver bestämma. Allmänt gäller

$$b_n = 2 \int_0^1 x \sin nx dx = \left[-2x \frac{\cos n\pi x}{\pi n}\right]_0^1 + \frac{2}{\pi n} \int_0^1 \cos n\pi x dx = -2 \frac{\cos n\pi}{\pi n}.$$

Detta ger $a = b_1 = 2/\pi$ och $b = b_2 = -1/\pi$.

För att bestämma minimivärdet kan vi exempelvis använda Parsevals formel vilket också kan användas för att visa att de val av a och b verkligen minimerar integralen. Funktionen

$$g(x) = x - a \sin \pi x - b \sin 2\pi x$$

har fourierserieutvecklingen

$$g(x) \sim (b_1 - a) \sin \pi x + (b_2 - b) \sin 2\pi x + \sum_{n=3}^\infty b_n \sin n\pi x$$

där b_n alltså svarar mot fourierkoefficienterna på $[-1, 1]$ för $f(x) = x$. Parsevals formel ger därför

$$\int_{-1}^1 (x - a \sin \pi x - b \sin 2\pi x)^2 dx = (b_1 - a)^2 + (b_2 - b)^2 + \sum_{n=3}^\infty b_n^2.$$

Här minimeras alltså högerledet av $a = b_1$ och $b = b_2$ och i detta fall har vi

$$\int_{-1}^1 (x - a \sin \pi x - b \sin 2\pi x)^2 dx = \sum_{n=3}^\infty b_n^2.$$

Men å andra sidan ger Parsevals formel på $f(x) = x$ att

$$\int_{-1}^1 x^2 dx = \sum_{n=1}^\infty b_n^2$$

vilket ger att

$$\sum_{n=3}^\infty b_n^2 = \int_{-1}^1 x^2 dx - b_1^2 - b_2^2 = \frac{2}{3} - \frac{4}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} = \frac{2}{3} - \frac{5}{\pi^2}$$

som därför är det sökta minimivärdet.