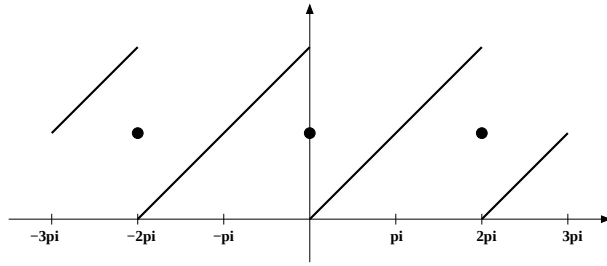


1. (a)



(b) Serien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos nx \, dx \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \sin nx \, dx.$$

För $n = 0$ ger detta

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{2\pi} = 2\pi.$$

För $n > 0$ har vi genom partiell integration dels

$$a_n = \frac{1}{\pi} \left[x \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{2\pi} - \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \sin nx \, dx = 0$$

dels

$$b_n = \frac{1}{\pi} \left[-x \cdot \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{2\pi} + \frac{1}{\pi n} \int_0^{2\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left(-2\pi \cdot \frac{\cos 2\pi n}{n} \right) = -\frac{2}{n}.$$

Den sökta fourierserien är alltså

$$\pi - 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

(c) Vi använder Parsevals formel

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (f(x))^2 \, dx$$

som i vårt fall ger

$$2\pi^2 + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{\pi} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2\pi} = \frac{8\pi^2}{3}.$$

Detta leder till

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{8\pi^2}{3} - 2\pi^2 \right) = \frac{\pi^2}{6}.$$

2. (b) Vi använder laplacetransform som ger

$$F(s) = \frac{s}{s^2 + 1} \quad \text{och} \quad \sin 2t \supset \frac{2}{s^2 + 4}$$

och där sambandet $f * g(t) = \sin 2t$ enligt faltningssatsen för laplacetransformer då kan skrivas

$$F(s)G(s) = \frac{2}{s^2 + 4}$$

dvs

$$G(s) = \frac{s^2 + 1}{s} \cdot \frac{2}{s^2 + 4} = 2 \cdot \frac{s^2 + 1}{s(s^2 + 4)}.$$

Detta leder till

$$G(s) = \frac{2s}{s^2 + 4} + \frac{2}{s(s^2 + 4)}.$$

Den sista av dessa termer kan vi partialbråksuppdelna enkelt genom omskrivningen

$$\frac{2}{s(s^2+4)} = \frac{2s}{s^2(s^2+4)} = s \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2+4} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4} \right).$$

Detta leder till att

$$G(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s} + \frac{3}{2} \cdot \frac{s}{s^2+4}$$

dvs

$$g(t) = \frac{1+3\cos 2t}{2}.$$

3. (a) Låt $c_n = n(n-1)3^{-n}x^n$. Då gäller

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \left| \frac{(n+1)n3^{-n-1}x^{n+1}}{n(n-1)3^{-n}x^n} \right| = \frac{n+1}{n-1} \cdot \frac{|x|}{3} \rightarrow \frac{|x|}{3}$$

då $n \rightarrow \infty$. Serien är därför enligt kvotkriteriet konvergent om $|x| < 3$ och divergent om $|x| > 3$. Konvergensraden är därmed 3.

- (b) Betrakta för $|t| < 1$ den geometriska serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}.$$

Efter två deriveringar har vi då

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^{n-2} = \frac{2}{(1-t)^3}$$

vilket efter multiplikation med t^2 ger

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)t^n = \frac{2t^2}{(1-t)^3}.$$

Här kan vi sätta in $t = 1/3$ och få

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)3^{-n} = \frac{2 \cdot 3^{-2}}{(1-3^{-1})^3} = \frac{2 \cdot 3}{(3-1)^3} = \frac{3}{4}.$$

4. Metod 1: z -transform:

Låt $Y(z)$ vara transformen av följderna $\{y_n\}$. Då gäller $\{y_{n+1}\} \supset zY(z) - y_0z = zY(z) - z$ och $\{y_{n+2}\} \supset z^2Y(z) - y_0z^2 - y_1z = z^2Y(z) - z^2 - 3z$. Det gör att differensekvationen tillsammans med begynnelsevärdena övergår i

$$z^2Y(z) - z^2 - 3z - 4(zY(z) - z) + 3Y(z) = \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-4}$$

dvs

$$(z^2 - 4z + 3)Y(z) = \frac{z(2z-6)}{(z-2)(z-4)} + z^2 - z$$

dvs

$$(z-1)(z-3)Y(z) = \frac{2z(z-3)}{(z-2)(z-4)} + z(z-1)$$

och alltså

$$Y(z) = \frac{2z}{(z-1)(z-2)(z-4)} + \frac{z}{z-3}.$$

Vi gör här partialbråksuppdelning av första termen efter att ha brutit ut z

$$\frac{2}{(z-1)(z-2)(z-4)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} + \frac{C}{z-4}$$

där "handpåläggning" ger $A = 2/3$, $B = -1$ och $C = 1/3$. Sammantaget får vi

$$Y(z) = \frac{2}{3} \cdot \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-2} + \frac{z}{z-3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{z}{z-4}$$

och alltså

$$y_n = \frac{2}{3} - 2^n + 3^n + \frac{1}{3} \cdot 4^n$$

Metod 2: Utan z -transform:

Den karakteristiska ekvationen $r^2 - 4r + 3 = 0$ har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 3$ så motsvarande homogena ekvation har lösningen

$$y_n^{(h)} = A + B \cdot 3^n.$$

För att hitta en partikulärlösning antar vi $y_n = a \cdot 2^n + b \cdot 4^n$ och betraktar ekvationens vänsterled

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = a \cdot 2^{n+2} + b \cdot 4^{n+2} - 4(a \cdot 2^{n+1} + b \cdot 4^{n+1}) + 3(a \cdot 2^n + b \cdot 4^n)$$

vilket ger

$$y_{n+2} - 4y_{n+1} + 3y_n = a(2^{n+2} - 4 \cdot 2^{n+1} + 3 \cdot 2^n) + b(4^{n+2} - 4 \cdot 4^{n+1} + 3 \cdot 4^n) = -a \cdot 2^n + 3b \cdot 4^n.$$

Vi har därför en lösning till ekvationen om vi tar $a = -1$ och $b = 1/3$ dvs en partikulärlösning är

$$y_n^{(p)} = -2^n + \frac{1}{3} \cdot 4^n.$$

Den allmänna lösningen till ekvationen är därför

$$y_n = -2^n + \frac{1}{3} \cdot 4^n + A + B \cdot 3^n.$$

De två startvärdena ger sedan $1 = y_0 = -1 + \frac{1}{3} + A + B$ och $3 = y_1 = -2 + \frac{4}{3} + A + 3B$ dvs ekvationerna $A + B = \frac{5}{3}$ och $A + 3B = \frac{11}{3}$ med lösningen $A = \frac{2}{3}$ och $B = 1$. Den sökta lösningen är därigenom

$$y_n = \frac{2}{3} - 2^n + 3^n + \frac{1}{3} \cdot 4^n$$

5. Funktionen $g(t) = |\sin t|$ är periodisk med perioden π . Dess laplacetransform $G(s)$ ges därför av

$$G(s) = \frac{1}{1 - e^{-\pi s}} \int_0^\pi \sin t \cdot e^{-st} dt.$$

Denna integral kan uppfattas som laplacetransformen av den funktion som är $\sin t$ för $0 < t < \pi$ och 0 för övrigt, dvs funktionen $\sin t \cdot u_0(t) - \sin t \cdot u_\pi(t)$. För att kunna använda formlerna för laplacetransformering observerar vi att $\sin t = -\sin(t - \pi)$ och får

$$\sin t \cdot u_0(t) - \sin t \cdot u_\pi(t) = \sin t \cdot u_0(t) + \sin(t - \pi) \cdot u_\pi(t) \supset \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{1}{s^2 + 1} \cdot e^{-\pi s} = \frac{1 + e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Detta ger att

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\pi s}}{1 - e^{-\pi s}}.$$

Den funktion vi egentligen är intresserade av är $f(t) = e^{-t}g(t)$ vars transform $F(s)$ alltså ges av $F(s) = G(s + 1)$ dvs

$$F(s) = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1} \cdot \frac{1 + e^{-\pi(s+1)}}{1 - e^{-\pi(s+1)}}.$$

6. **Fallet $p = 2$.** Vi försöker använda Weierstrass majorantsats. Låt $u_n(x) = (1 - x)^2 x^n$. för att undersöka maximum av $|u_n(x)|$ på $[0, 1]$ deriverar vi funktionen och får

$$u'_n(x) = -2(1 - x)x^n + (1 - x)^2 \cdot x^{n-1} = (n - (n + 2)x)(1 - x)x^n.$$

Vi ser att funktionen på intervallet $[0, 1]$ har maximum i $x = n/(n + 2)$. Eftersom funktionen dessutom inte är negativ på intervallet får vi

$$|u_n(x)| \leq u_n\left(\frac{n}{n+2}\right) = \left(1 - \frac{n}{n+2}\right)^2 \left(\frac{n}{n+2}\right)^n \leq \left(\frac{2}{n+2}\right)^2 \leq \frac{4}{n^2}$$

för alla x i $[0, 1]$. Eftersom serien $\sum_{n=1}^\infty 4/n^2$ är konvergent ger Weierstrass att den givna serien konvergerar likformigt på $[0, 1]$.

Fallet $p = 1$. Observera att för $0 \leq x < 1$ gäller

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1-x)x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1-x}{1-x} = 1$$

medan summan är 0 för $x = 1$. Summan är alltså inte kontinuerlig i $x = 1$. Däremot är varje term i summan kontinuerlig på $[0, 1]$ och hade konvergensen varit likformig på $[0, 1]$ skulle också summafunktionen varit kontinuerlig där. Det är den alltså inte så konvergensen är inte likformig.

8. Mängden $\{1, \cos \pi t, \cos 2\pi t, \dots\}$ bildar ett ortogonalt system i den skalär produkt som ges av

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

Vi utvecklar funktionen $\sin \pi t$ i en cosinusserie på $[0, 1]$ och får

$$\sin \pi t \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\pi t$$

där

$$a_n = \frac{2}{1} \int_0^1 \sin \pi t \cos n\pi t dt.$$

sedan vet vi att den givna integralen minimeras om vi tar $a = a_0/2$, $b = a_1$ och $c = a_2$.

För att beräkna koefficienterna använder vi omskrivningen

$$2 \sin \pi t \cos n\pi t = \sin(\pi t + n\pi t) + \sin(\pi t - n\pi t) = \sin(n+1)\pi t + \sin(n-1)\pi t$$

som ger

$$a_0 = \int_0^1 2 \sin \pi t dt = \frac{4}{\pi}$$

$$a_1 = \int_0^1 \sin 2\pi t dt = 0$$

$$a_2 = \int_0^1 (\sin 3\pi t - \sin \pi t) dt = \frac{2}{3\pi} - \frac{2}{\pi} = -\frac{4}{3\pi}$$

Slutsatsen är alltså att man skall ta $a = 2/\pi$, $b = 0$ och $c = -4/(3\pi)$.