

1. (a) Serien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

där

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad \text{och} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx.$$

För $n = 0$ ger detta

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \, dx = 1$$

medan vi för $n > 0$ har dels

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} = 0$$

dels

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{\pi n}.$$

Detta ger alltså $b_n = 0$ om n är jämnt och $b_n = 2/(\pi n)$ om n är udda. Den sökta fourierserien är därför

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)x}{2k-1}$$

- (b) Vi använder Parsevals formel som ger

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} 1^2 \, dx = 1$$

vilket leder till

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} = \frac{\pi^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi^2}{8}$$

- (c) Genom att sätta in $x = \pi/2$ i fourierserien och utnyttja att den styckvis deriverbara $f(x)$ är kontinuerlig i denna punkt får vi

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k-1)\frac{\pi}{2}}{2k-1} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1.$$

Men

$$\sin(2k-1)\frac{\pi}{2} = \sin(k\pi - \frac{\pi}{2}) = (-1)^k(-1) = (-1)^{k+1} = (-1)^{k-1}$$

så vi får

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = 1$$

och alltså

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \frac{\pi}{4}.$$

2. Laplacetransformering ger

$$(s^2 + 4)Y(s) - s - 2 = \frac{5}{s+1}$$

dvs

$$Y(s) = \frac{5}{(s+1)(s^2+4)} + \frac{s+2}{s^2+4}.$$

Vi ansätter partialbråksuppdelningen

$$\frac{5}{(s+1)(s^2+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{Bs+C}{s^2+4}$$

som efter multiplikation med vänsterledets nämnare är ekvivalent med

$$(A+B)s^2 + (B+C)s + 4A + C = 5.$$

Identifiering av koefficienter ger $A + B = 0$, $B + C = 0$ och $4A + C = 5$, med lösningen $A = 1$, $B = -1$ och $C = 1$. Detta leder till

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1-s}{s^2+4} + \frac{s+2}{s^2+4} = \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s^2+4}$$

och alltså

$$y(t) = e^{-t} + \frac{3}{2} \cdot \sin 2t.$$

3. Metod 1: Utan z -transform:

Karakteristiska ekvationen $r^2 - 3r + 2 = 0$ har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = 2$. För att hitta en partikulärlösning gör vi ansatsen $y_n = an$. (Bara $y_n = a$ fungerar inte när en av de karakteristiska rötterna är 1.) Detta leder till

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = a(n+2) - 3a(n+1) + 2an = -a$$

som visar att vi har en lösning till differensekvationen om $a = -1$ dvs $y_n^{(p)} = -n$. Den inhomogena differensekvationen har därför den allmänna lösningen $y_n = A + B \cdot 2^n - n$. Återstår att bestämma A och B så att startvärdena är uppfyllda. Vi har $y_0 = A + B$ och $y_1 = A + 2B - 1$ så villkoren $y_0 = 0$ och $y_1 = 1$ är uppfyllda då $A = -2$ och $B = 2$. Detta ger

$$y_n = 2 \cdot 2^n - n - 2 = 2^{n+1} - n - 2.$$

Metod 2: Med z -transform:

Transformerering ger

$$(z^2 - 3z + 2)Y(z) - z = \frac{z}{z-1}$$

dvs

$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)^2(z-2)} + \frac{z}{(z-1)(z-2)} = z \cdot \frac{z}{(z-1)^2(z-2)}.$$

Vi gör partialbråksuppdelningen

$$\frac{z}{(z-1)^2(z-2)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-2}$$

som leder till

$$A(z-1)(z-2) + B(z-2) + C(z-1)^2 = z$$

dvs

$$(A+C)z^2 + (-3A+B-2C)z + 2A-2B+C = z$$

och alltså $A+C=0$, $-3A+B-2C=1$ och $2A-2B+C=0$. Detta är uppfyllt då $A=-2$, $B=-1$ och $C=2$. För $Y(z)$ har vi alltså

$$Y(z) = 2 \cdot \frac{z}{z-2} - \frac{z}{(z-1)^2} - 2 \cdot \frac{z}{z-1}$$

vilket vid inverstransformering ger

$$y_n = 2 \cdot 2^n - n - 2.$$

4. (a) Med beteckningen $u_a(t)$ för enhetsstegfunktionen i a kan $f(t)$ skrivas

$$f(t) = t(u_0(t) - u_1(t)) + (2-t)(u_1(t) - u_2(t)) = tu_0(t) - 2(t-1)u_1(t) + (t-2)u_2(t).$$

Vi vet att t har transformen $1/s^2$ och vi har formeln $f(t-a)u_a(t) \subset F(s)e^{-as}$. Detta ger i vårt fall

$$F(s) = \frac{1 - 2e^{-s} + e^{-2s}}{s^2}.$$

(b) Observera att $s^2 + 2s + 2 = (s+1)^2 + 1$. Vi vet att

$$\frac{1}{s^2+1} \subset \sin t \text{ och } \frac{s}{s^2+1} \subset \cos t.$$

Det leder till

$$\frac{1}{(s+1)^2+1} \subset e^{-t} \sin t \text{ och } \frac{s+1}{(s+1)^2+1} \subset e^{-t} \cos t$$

dvs

$$\frac{s}{s^2+2s+2} = \frac{s}{(s+1)^2+1} \subset e^{-t}(\cos t - \sin t)$$

och slutligen

$$\frac{se^{-\pi s}}{s^2+2s+2} = e^{-(t-\pi)}(\cos(t-\pi) - \sin(t-\pi))u_\pi(t) = e^{\pi-t}(\sin t - \cos t)u_\pi(t)$$

5. För z -transformerna av in- och utsignalerna $X(z)$ respektive $Y(z)$ finns en överföringsfunktion $H(z)$ så att $Y(z) = H(z)X(z)$. För de givna in- och utsignalerna ger detta samband likheten

$$\frac{z}{z - \frac{1}{2}} = H(z) \cdot \frac{z}{z - 2}$$

och alltså

$$H(z) = \frac{z - 2}{z - \frac{1}{2}}.$$

För den sökta utsignalen gäller

$$Y(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z - 3}$$

så vi har

$$Y(z) = \frac{z - 2}{z - \frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z - 3} = z \cdot \frac{z - 2}{(z - \frac{1}{2})(z - 3)}.$$

Vi antar partialbråksuppdelningen

$$\frac{z - 2}{(z - \frac{1}{2})(z - 3)} = \frac{A}{z - \frac{1}{2}} + \frac{B}{z - 3}$$

där handpålågning ger $A = 3/5$ och $B = 2/5$. Detta leder till

$$Y(z) = \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{z - \frac{1}{2}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{z}{z - 3}$$

och alltså att utsignalen är

$$y_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{-n} + \frac{2}{5} \cdot 3^n.$$

6. (a) För $x = 0$ är summan 0 eftersom varje term är det. För $x > 0$ har vi en geometrisk serie med kvoten $1/(1+x)$ vars absolutbelopp är mindre än 1 varför serien är konvergent med summan

$$s = x^a \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{1+x}} = x^{a-1}(1+x).$$

- (b) Vi observerar först att om $a = 1$ är summan 0 för $x = 0$ medan den är $1+x$ för $x > 0$. Den är alltså inte kontinuerlig i $x = 0$ vilket den skulle varit om serien konvergerat likformigt på $[0, \infty[$. Alltså serien är inte likformigt konvergent på $[0, \infty[$ då $a = 1$.

Om $a = 2$ är summan $x(1+x)$ då $x > 0$ och alltså kontinuerlig i $x = 0$ men det räcker inte för att visa likformig konvergens. Vi använder istället Weierstrass majorantsats. Inför beteckningen $u_n(x)$ för seriens termer, dvs $u_n(x) = x^2(1+x)^{-n}$. Derivering ger

$$u'_n(x) = 2x(1+x)^{-n} - nx^2(1+x)^{-n-1} = x(1+x)^{-n-1}(2+2x-nx)$$

och vi ser att om $n > 2$ är derivatan 0 då $x = 2/(n-2)$ och att detta ger ett maximum på $[0, \infty[$. Eftersom $u_n(x) \geq 0$ då $x \geq 0$ har vi $|u_n(x)| \leq u_n(2/(n-2))$. Vidare gäller för alla $x \geq 0$ att $u_n(x) \leq x^2$ varför vi för $n > 2$ har uppskattningen

$$|u_n(x)| \leq \frac{4}{(n-2)^2} \text{ för alla } x \geq 0.$$

Eftersom

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4}{(n-2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$$

är konvergent så ger Weierstrass sats att den givna serien är likformigt konvergent för $x \geq 0$.

8. (a) Låt

$$c_n = \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n.$$

Då gäller

$$\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{((n+1)!)^2(|x|^{n+1})}{2(n+1)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2|x|^n} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \cdot |x| = \frac{n+1}{2(2n+1)} \cdot |x| \rightarrow \frac{|x|}{4}$$

då $n \rightarrow \infty$. Enligt kvotkriteriet konvergerar serien om detta gränsvärde är mindre än 1 och divergerar om det är större än 1. Alltså är konvergensraden 4.

(b) Låt i detta fall

$$c_n = \frac{(2^n + n^3)x^n}{3^n + n^2}.$$

Här gör vi omskrivningen

$$c_n = \frac{2^n(1 + n^3 2^{-n})x^n}{3^n(1 + n^2 3^{-n})}$$

och får

$$|c_n|^{1/n} = \frac{2|x|}{3} \cdot \frac{(1 + n^3 2^{-n})^{1/n}}{(1 + n^2 3^{-n})^{1/n}} \rightarrow \frac{2|x|}{3}$$

då $n \rightarrow \infty$. Rotkriteriet ger då att serien konvergerar om $|x| < 3/2$ och divergerar om $|x| > 3/2$. Konvergensraden är därför $3/2$.