Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 23/8-06

1. (a) Serien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kt + b_k \sin kt)$$

där alla $b_k = 0$ eftersom funktionen är jämn.För a_k har vi

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2 \cos kt\,dt.$$

I sista ledet har vi åter använt att $f(t)$ är jämn. Genom partiell integration får vi

$$\int_0^{\pi} t^2\cos kt\,dt = \left[t^2\cdot\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k}\int_0^{\pi} t\sin kt\,dt = 0 - \frac{2}{k}\left[-t\cdot\frac{\cos kt}{k}\right]_0^{\pi} - \frac{2}{k^2}\left[1\cdot\cos kt\right]_0^{\pi} = \frac{2\pi}{k^2}\cos k\pi$$

vilket ger

$$a_k = \frac{4}{k^2}\cos k\pi = \frac{4\cdot(-1)^k}{k^2} = -4\cdot\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}.$$

Dessa räkningar fungerar inte i specialfallet $k = 0$. Vi har

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^2\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^3}{3} = \frac{2\pi^2}{3}$$

. Detta ger

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt + b_k\sin kt) = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos kt$$

vilket är det önskade resultatet.

(b) Eftersom den periodiskt fortsatta funktionen är kontinuerlig och styckvis deriverbar konvergerar serien i varje punkt mot funktionsvärdet. Speciellt genom att ta $t = 0$ får vi

$$0^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

(c) Om vi istället sätter in $t = \pi$ får vi

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} - 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k^2}\cos k\pi$$

dvs

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

som ger

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

(d) Parsevals formel ger att

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)^2\,dt$$

dvs

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{4\pi^4}{9} + 16\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt$$

Eftersom

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t^4\,dt = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} t^4\,dt = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\pi^5}{5} = \frac{2\pi^4}{5}$$

får vi

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

2. Laplacetransformering ger

$$sY(s) - 1 + 5Y(s) + \frac{6}{s}Y(s) = \frac{1}{s+1}$$

som ger

$$Y(s) = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s^2+5s+6)} = \frac{s(s+2)}{(s+1)(s+2)(s+3)} = \frac{s}{(s+1)(s+3)}.$$

Partialbråksuppdelning ger sedan

$$Y(s) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+1} + \frac{3}{2}\frac{1}{s+3}$$

vilket innebär att lösningen är

$$y(t) = -\frac{1}{2}\cdot e^{-t} + \frac{3}{2}\cdot e^{-3t}$$

3. Den karakteristiska ekvationen är $r^2 - 2r + 2 = 0$ som har rötterna $r = 1 \pm i$. På polär form kan dessa skrivas

$$r = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} \pm i \sin\frac{\pi}{4}).$$

Det gör att den homogena ekvation som svarar mot den givna differensekvationen har lösningen

$$y_n^{(p)} = (\sqrt{2})^n (C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}).$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n = An + B$ vilket vid insättning leder till att

$$y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = A(n+2) + B - 2(A(n+1) + B) + 2(An + B) = An + B$$

så vi har en lösning om vi tar $A = 1$ och $B = 0$, dvs $y_n^{(p)} = n$. Sammantaget ger detta den allmänna lösningen

$$y_n = n + (\sqrt{2})^n (C_1 \cos\frac{n\pi}{4} + C_2 \sin\frac{n\pi}{4}).$$

Denna ger

$$y_0 = C_1 \text{ och } y_1 = 1 + \sqrt{2}(C_1 \cos\frac{\pi}{4} + C_2 \sin\frac{\pi}{4}) = 1 + C_1 + C_2$$

så för att få villkoren $y_0 = y_1 = 1$ uppfyllda behöver vi ta $C_1 = 1$ och $C_2 = -1$ vilket ger lösningen

$$n + (\sqrt{2})^n (\cos\frac{n\pi}{4} - \sin\frac{n\pi}{4}).$$

4. Laplacetransformering ger

$$sY(s) + Y(s) = 1 + \frac{e^{-s}}{s}$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{e^{-s}}{s(s+1)}.$$

Vi vet att $1/(s+1))$ svarar mot funktionen e^{-t} så vi tittar vidare på de andra termen. Först observerar vi genom partialbråksuppdelning att

$$\frac{1}{s(s+1)} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

som är transformen av $H(t) - e^{-t}$. Detta gör att

$$\frac{e^{-s}}{s(s+1)}$$

är transform av $H(t-1)(H(t-1) - e^{-(t-1)}) = H(t-1)(1 - e^{-(t-1)})$. Sammantaget ger detta att den sökta lösningen är

$$y(t) = e^{-t} + H(t-1)(1 - e^{-(t-1)}).$$

5. Systemets överföringsfunktion $H(z)$ är z-transformen av pulssvaret dvs

$$H(z) = \frac{z}{z - 0.5}.$$

Sambandet mellan z-transformen, $X(z)$, av insignalen och z-transformen, $Y(z)$, av utsignalen ges av $Y(z) = H(z)X(z)$. I det sökta fallet är $X(z) = z/(z - 0.8)$ så vi får

$$Y(z) = \frac{z}{z-0.5}\cdot\frac{z}{z-0.8} = z\cdot\frac{z}{(z-0.5)(z-0.8)}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$\frac{z}{(z-0.5)(z-0.8)} = \frac{8}{3}\frac{1}{z-0.8} - \frac{5}{3}\frac{1}{z-0.5}$$

och alltså

$$Y(z) = \frac{8}{3}\frac{z}{z-0.8} - \frac{5}{3}\frac{z}{z-0.5}$$

som ger att utsignalen är

$$y_n = \frac{8}{3}\cdot 0.8^n - \frac{5}{3}\cdot 0.5^n.$$

6. Observera först att utvecklingen av funktionen $f(x) = x$ i en cosinusserie på intervallet $[0,1]$ är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k \cos k\pi x$$

där

$$a_k = 2\int_0^1 f(x)\cos k\pi x\, dx.$$

De bästa valen av talen a, b, c är då $a = a_0/2$, $b = a_1$ och $c = a_2$, så vi räknar ut dessa. Allmänt har vi genom partiell integration

$$a_k = 2\int_0^1 x\cos k\pi x\, dx = \left[2x\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 - \frac{2}{k\pi}\int_0^1 \sin k\pi x\, dx = \frac{2}{k\pi}\left[\frac{\cos k\pi x}{k\pi}\right]_0^1 = \frac{2(\cos k\pi - 1)}{k^2\pi^2}.$$

Detta ger oss

$$b = a_1 = -\frac{4}{\pi^2} \text{ och } c = a_2 = 0.$$

Däremot fungerar inte formeln för $k = 0$ men där har vi

$$a_0 = 2\int_0^1 x dx = 1$$

sä vårt val av a skall alltså vara $a = 1/2$.

8. Vi kan i båda fallen använda rotkriteriet.

(a)

$$\left|\frac{x^n}{2^n + n^2}\right|^{1/n} = \frac{|x|}{2(1 + n^2\cdot 2^{-n})} \to \frac{|x|}{2}$$

då $n \to \infty$. Serien är därför konvergent om $|x| < 2$ och divergent om $|x| > 2$. Konvergensradien är därför 2.

(b)

$$\left|\frac{x^{2n+1}}{2^n}\right|^{1/n} = \frac{|x|^{2+1/n}}{2} \to \frac{|x|^2}{2}$$

då $n \to \infty$.Serien är alltså konvergent om $|x|^2 < 2$ och divergent om $|x|^2 > 2$. Konvergensradien är därmed $\sqrt{2}$.

För att bestämma seriesumman observerar vi att med $t = x^2/2$ har vi

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{2^n} = x\sum_{n=0}^{\infty} t^n = x\cdot\frac{1}{1-t} = \frac{2x}{2-x^2}.$$