Lösningar till Transformer och matematisk programvara för I2, den 18/1-07

1. (a) Serien är av formen

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Vi har

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (\pi - x) \cos nx \, dx.$$

För $n \neq 0$ får vi genom partiell integration

$$\pi a_n = \left[(\pi - x) \cdot \frac{\sin nx}{n} \right]_0^{\pi} + \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{n^2} \left[-\cos nx \right]_0^{\pi} = \frac{1 - \cos n\pi}{n^2} = \begin{cases} 0 & \text{då } n \text{ jämnt} \\ \frac{2}{n^2} & \text{då } n \text{ udda} \end{cases}$$

För $n = 0$ har vi

$$\pi a_0 = \int_0^{\pi} (\pi - x) \, dx = \frac{1}{2} \left[-(\pi - x)^2 \right]_0^{\pi} = \frac{\pi^2}{2}.$$

För sinuskoefficienterna har vi på motsvarande sätt

$$\pi b_n = \int_0^{\pi} (\pi - x) \sin nx \, dx = \left[-(\pi - x) \cdot \frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{n} \int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{\pi}{n}$$

Sammantaget har vi alltså

$$a_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{då } n = 0 \\ 0 & \text{då } n \text{ jämnt} \neq 0 \\ \frac{2}{\pi n^2} & \text{då } n \text{ udda} \end{cases} \quad \text{medan } b_n = \frac{1}{n} \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

(b) Tar vi $x = 0$ i fourierserien får vi

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{f(0-) + f(0+)}{2}$$

dvs eftersom $a_n = 0$ då n jämnt och positivt

$$\frac{\pi}{4} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Detta leder till att

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

2. Laplacetransformering ger

$$s^2 Y(s) - s - 2 - 5(sY(s) - 1) + 6Y(s) = \frac{1}{s}$$

dvs

$$(s^2 - 5s + 6) Y(s) = \frac{1}{s} + s - 3$$

och eftersom $(s^2 - 5s + 6) = (s - 2)(s - 3)$ har vi

$$Y(s) = \frac{1}{s(s-2)(s-3)} + \frac{1}{s-2}.$$

Partialbråksuppdelning ger

$$Y(s) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s-2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{s-3}.$$

Detta ger lösningen

$$y(t) = \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot e^{2t} + \frac{1}{3} \cdot e^{3t}.$$

3. z-transformering ger
$$z^2Y(z) - z^2 - 2z - 5(zY(z) - z) + 6Y(z) = \frac{z}{z-1}$$
dvs
$$(z^2 - 5z + 6)Y(z) = \frac{z}{z-1} + z^2 - 3z$$
och som i föregående uppgift
$$Y(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)(z-3)} + \frac{z}{z-2}.$$
Genom partialbråksuppdelning men där vi behåller ett z i täljaren får vi
$$Y(z) = \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{z}{z-3}$$
vilket ger
$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}.$$

4. Den karakteriska ekvationen är $r^2 - 5r + 6 = 0$ med rötterna $r_1 = 2$ och $r_2 = 3$. Tillhörande homogena differensekvation har då lösningen
$$y_n^(h) = A \cdot 2^n + B \cdot 3^n.$$
För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n^(p) = a$ som i ekvationen ger
$$a - 5a + 6a = 1$$
dvs vi har en lösning om vi tar $a = 1/2$.
Alltså gäller att den sökta lösningen har formen
$$y_n = y_n^(p) + y_n^(h) = \frac{1}{2} + A \cdot 2^n + B \cdot 3^n$$
där konstanterna skall väljas så att $y_0 = 1$ och $y_1 = 2$. Det första av dessa villkor ger $1/2 + A + B = 1$ medan det andra ger $1/2 + 2A + 3B = 2$. Detta ger $A = 0$ och $B = 1/2$. Så den sökta lösningen är
$$y_n = \frac{1}{2} + \frac{3^n}{2}.$$

5. (a) y_2 är koefficienten framför $1/z^2$ i serien dvs
$$y_2 = \frac{2^2}{3^2 + 2} = \frac{4}{11}.$$
(b) Problemet är ekvivalent med att se för vilka z som serien konvergerar. Låt
$$a_n = \frac{2^n}{(3^n + n)z^n}.$$
Då har vi
$$|a_n|^{1/n} = \frac{2}{3\cdot(1 + n\cdot 3^{-n})^{1/n}}\cdot|z| \to \frac{2}{3|z|}$$
då $n \to \infty$. Enligt rotkriteriet är då serien konvergent om $\frac{2}{3|z|} < 1$ och divergent om $\frac{2}{3|z|} > 1$. Om $\frac{2}{3|z|} = 1$ så gäller gäller $|z| = 2/3$ och alltså
$$|a_n| = \frac{2^n}{(3^n + n)}\cdot\frac{3^n}{2^n} = \frac{1}{1 + n\cdot 3^{-n}} \to 1$$
då $n \to \infty$. Detta innebär att a_n inte går mot 0 då $n \to \infty$ så serien kan inte konvergera i detta fall. Alltså är serien konvergent om och endast om $|z| > 2/3$.

6. Funktionen uppfyller $f(t) = 0$ då $t < 0$ och då $t > 4$. Vidare gäller $f(t) = 2t$ för $0 < t < 1$ medan $f(t) = -1$ då $1 < t < 4$.
(a) Funktionen kan skrivas
$$f(t) = 2t(u_0(t) - u_1(t)) - (u_1(t) - u_4(t)) = 2tu_0(t) - (2t+1)u_1(t) + u_4(t).$$

(b) Man kan välja om man vill utnyttja (a) eller direkt använda själva definitionen. Om vi väljer att använda (a) gör vi omskrivningen

$$f(t) = 2tu_0(t) - 2(t-1)u_1(t) - 3u_1(t) + u_4(t).$$

Med hjälp av formelsamlingen får vi då transformen

$$F(s) = \frac{2}{s^2} - \frac{2}{s^2} \cdot e^{-s} - \frac{3}{s} \cdot e^{-s} + \frac{1}{s} \cdot e^{-4s}.$$

7. (b) Från definitionen och med hjälp av trigonometrisk formel från formelsamlingen har vi

$$f \star g(t) = \int_0^t \sin u \cdot \sin 2(t-u)\, du = \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(3u-2t) - \cos(2t-u))\, du$$

dvs

$$f \star g(t) = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin(3u-2t)}{3} + \sin(2t-u)\right]_0^t = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin t}{3} + \frac{\sin 2t}{3} + \sin t - \sin 2t\right) = \frac{2\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{3}.$$

(c) Vi vet att laplacetransformen av $f \star g(t)$ är

$$F(s)G(s) = \frac{1}{s^2+1} \cdot \frac{2}{s^2+4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{s^2+4}$$

vilket innebär att

$$f \star g(t) = \frac{2\sin t}{3} - \frac{\sin 2t}{3}.$$