Lösningar till TMV050 Transformer och matematisk programvara för I2 aug-07

1. Laplacetransformering ger med vanliga beteckningarna

$$(s^2+4)Y(s)-s=\frac{1}{s+1}$$

dvs

$$Y(s)=\frac{1}{(s+1)(s^2+4)}+\frac{s}{s^2+4}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+1}-\frac{s-1}{s^2+4}\right)+\frac{s}{(s+1)(s^2+4)}=\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s+1}+4\cdot\frac{s}{s^2+4}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}\right).$$

Detta leder till att

$$y(t)=0.2e^{-t}+0.8\cos 2t+0.1\sin 2t$$

2. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2-8r+7=0$$

som har rötterna $r_1=1$ och $r_2=7$. Den tillhörande homogena differensekvationen har alltså allmänna lösningen

$$y_n^(h)=A\cdot 1^n+B\cdot 7^n.$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n=a\cdot 2^n$. Detta ger

$$y_{n+2}-8y_{n+1}+7y_n=a\cdot 2^{n+2}-8a\cdot 2^{n+1}+7a\cdot 2^n=a\cdot 2^n\cdot\left(2^2-8\cdot 2+7\right)=-5a\cdot 2^n.$$

Vi har alltså en lösning till den givna differensekvationen om vi tar $a=-1$, dvs en partikulärlösning $y_n^{(p)}=-2^n$ vilket leder till den allmänna lösningen

$$y_n=A+B\cdot 7^n-2^n.$$

Återstår villkoren $y_0=1$ och $y_1=0$ som är uppfyllda precis då $A+B-1=1$ och $A+7B-2=0$ dvs då $A=2$ och $B=0$. Alltså är lösningen

$$y_n=2-2^n.$$

3. Transformering av ekvationen ger

$$z^2Y(z)-z^2-8zY(z)+8z+7Y(z)=\frac{5z}{z-2}$$

dvs

$$(z^2-8z+7)Y(z)=\frac{5z}{z-2}+z^2-8z$$

och alltså partialbråksuppdelningen

$$\frac{Y(z)}{z}=\frac{z^2-10z+21}{(z-1)(z-2)(z-7)}=\frac{z-3}{(z-1)(z-2)}=\frac{A}{z-1}+\frac{B}{z-2}.$$

"Handpåläggning" ger $A=-2$, $B=-1$ och alltså

$$Y(z)=2\cdot\frac{z}{z-1}-\frac{z}{z-2}$$

dvs

$$y_n=2-2^n$$

4. (a) Med bokens beteckningar har vi $2a=2$ dvs $a=1$ och alltså $k\pi/a=1$ så serien är alltså av formen

$$\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi t+b_k\sin k\pi t)\text{ där }a_k=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x(t)\cos k\pi t\,dt\text{ och }b_k=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x(t)\sin k\pi t\,dt.$$

I vårt fall ger detta för $k>0$

$$a_k=3\int_0^1\cos k\pi t\,dt=3\left[-\frac{\sin k\pi t}{k\pi}\right]_0^1=0$$

och

$$b_k = 3\int_0^1 \sin k\pi t\, dt = 3\left[-\frac{\cos k\pi t}{k\pi}\right]_0^1 = \frac{3}{k\pi}(1-\cos k\pi).$$

Detta leder till att $b_k = 0$ då k jämnt och $b_k = 6/(k\pi)$ då k är udda. Serien kan därför skrivas

$$\frac{a_0}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1}$$

men det återstår att bestämma a_0. Vi har

$$a_0 = 3\int_0^1 \cos 0\, dt = 3$$

så den sökta serien är

$$\frac{3}{2} + \frac{6}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)\pi t}{2n+1}$$

(b) I $t = 1$ är seriens summa $(f(1-) + f(1+))/2 = (3-0)/2 = \frac{3}{2}$.

5. Laplacetransformering ger

$$Y(s) + \frac{1}{s}Y(s) = \frac{2}{s^2+4} + e^{-\pi s}$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{2s}{(s^2+4)(s+1)} + \frac{s}{s+1}\cdot e^{-\pi s}$$

Partialbråksuppdelning ger

$$Y(s) = \frac{2}{5}\cdot\left(\frac{s+4}{s^2+4} - \frac{1}{s+1}\right) + e^{-\pi s}\cdot\left(1 - \frac{1}{s+1}\right)$$

som ger

$$y(t) = \frac{2}{5}\cdot\left(\cos 2t + 2\sin 2t) - e^{-t}\right) + \delta(t-\pi) - e^{-t+\pi}Theta(t-\pi).$$

6. Mellan z-transformerna av en insignal $\{x_n\}$ och en utsignal $\{y_n\}$ gäller sambandet $Y(z) = H(z)X(z)$ där $H(z)$ är systemets överföringsfunktion.

(a) I detta fall är $x_n = 1^n$ vilket ger $X(z) = z/(z-1)$ och $y_n = 1 - 0.2^n$ som ger

$$Y(z) = \frac{z}{z-1} - \frac{z}{z-0.2} = \frac{0.8z}{(z-1)(z-0.2)}.$$

Detta leder till

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{0.8z}{(z-1)(z-0.2)}\cdot\frac{z-1}{z} = \frac{0.8}{z-0.2}.$$

(b) Nu är insignalen $x_n = 0.1^n$ som ger $X(z) = z/(z-0.1)$, så för utsignalen gäller

$$Y(z) = \frac{0.8}{z-0.2}\cdot\frac{z}{z-0.1} = \frac{8z}{z-0.2} - \frac{8z}{z-0.1}$$

och alltså är utsignalen $y_n = 8(0.2^n - 0.1^n)$.

7. (a) Eftersom f är periodisk med perioden 2π har vi

$$h(t+2\pi) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t+2\pi-u)g(u)\, du = \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\, du = h(t).$$

(b) Att $f(t)$ är jämn ger oss

$$h(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(-t-u)g(u)\, du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+u)g(u)\, du.$$

Variabelsubstitutionen $u = -v$ ger oss då

$$h(-t) = \frac{1}{\pi}\int_{\pi}^{-\pi} f(t-v)g(-v)\cdot(-1)\, dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v)g(-v)\cdot dv = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-v)g(v)\cdot dv = h(t).$$

Här använde vi oss av att också $g(t)$ är jämn. Vi har alltså fått fram att $h(-t) = h(t)$ så h är jämn.

(c) Vi observerar först att om man har en periodisk funktion $x(u)$ med perioden 2π så gäller

$$\int_{t-\pi}^{t+\pi} x(u)\,du = \int_{-\pi}^{\pi} x(u)\,du$$

för varje t.

Genom variabelsubstitutionen $s = t - u$ har vi

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\,du = \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(s)g(t-s)\,ds.$$

Eftersom $f(s)$ och $g(t-s)$ båda är 2π-periodiska som funktioner av s är också $x(s) = f(s)g(t-s)$ det så vi kan använda anmärkningen ovan och byta integrationsintervallet och få

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\,du = \int_{t-\pi}^{t+\pi} f(s)g(t-s)\,ds = \int_{-\pi}^{\pi} f(s)g(t-s)\,ds.$$

Beviset är därmed klart.

(d) Eftersom $h(t)$ är jämn innehåller serien inga sinustermer. För koefficienterna för cosinustermerna gäller

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} h(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u)\,du\right)\cos nt\,dt.$$

Här kastar vi först om integrationsordningen och utnyttjar sedan att f är jämn till att få

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u-t)\cos nt\,dt\right) g(u)\,du.$$

Därefter utnyttjar vi del (c) och får

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(u-t)\,dt\right)\,du.$$

Här utnyttjar vi sedan formeln

$$\cos n(u-t) = \cos nt\cos nu + \sin nt\sin nu$$

och det faktum att

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,dt = 0$$

eftersom $f(t)\sin nt$ är udda. Detta ledert till att

$$a_n(h) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\cos nu\,dt\right) g(u)\,du = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} a_n(f)\cos nu g(u)\,du = a_n(f)a_n(g).$$