Lösningar till TMV050 Transformer och matematisk programvara för I2 jan-08

1. Vi använder laplacetransformering och får

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 3Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

dvs

$$(s^2 + 4s + 3)Y(s) = \frac{1}{s+2}$$

och alltså

$$Y(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

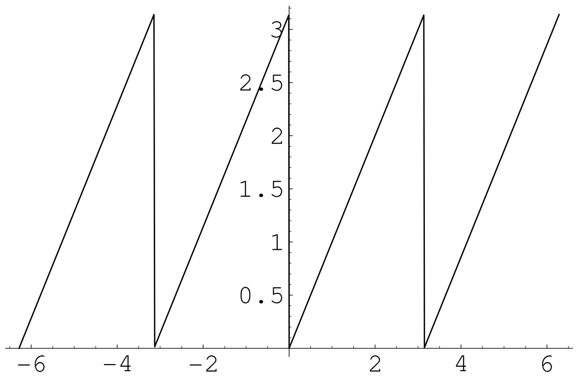
Partialbråksuppdelning ger

$$Y(s) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s+3}$$

som ger

$$y(t) = \frac{e^{-t} - 2e^{-2t} + e^{-3t}}{2}.$$

2. (a)



(b) Med formelsamlingens beteckningar har vi $a = \pi/2$ och får

$$a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-pi/2}^{\pi/2} f(t) \cos 2kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(t) \cos 2kt \, dt = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \cos 2kt \, dt$$

och på motsvarande sätt

$$b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \sin 2kt \, dt.$$

Vi börjar med cosinustermerna och ser genom partiell integration att

$$\frac{\pi}{2} a_k = \int_0^{\pi} t \cos 2kt \, dt = \left[t \cdot \frac{\sin 2kt}{2k} \right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \frac{\sin 2kt}{2k} \, dt = 0 + \left[\frac{\cos 2kt}{(2k)^2} \right]_0^{\pi} = 0.$$

Dessa räkningar fungerar för $k = 1, 2, 3, \ldots$ och ger då $a_k = 0$ men inte för $k = 0$. När $k = 0$ har vi istället

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t \, dt = \pi.$$

För sinustermerna får vi

$$\frac{\pi}{2} b_k = \int_0^{\pi} t \sin 2kt \, dt = \left[-t \cdot \frac{\cos 2kt}{2k} \right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos 2kt}{2k} \, dt = -\frac{\pi}{2k}$$

och därmed $b_k = -1/k$

(c) Vi använder Parsevals formel som säger att

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{a} \int_{-a}^{a} |f(t)|^2 \, dt = \frac{1}{a} \int_0^{2a} |f(t)|^2 \, dt$$

dvs i vårt fall

$$\frac{\pi^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} t^2 \, dt$$

vilket ger

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\pi^3}{3} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

3. Den karakteristiska ekvationen är

$$r^2 + r - 2 = 0$$

som har rötterna $r_1 = 1$ och $r_2 = -2$, vilket gör att den tillhörande homogena differensekvationen alltså har allmänna lösningen

$$y^{(}_n h) = A + B(-2)^n$$

För att hitta en partikulärlösning ansätter vi $y_n = a \cdot 2^n$. Detta ger

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = a \cdot 2^{n+2} + a \cdot 2^{n+1} - 2a \cdot 2^n = a \cdot 2^{n+2} = 4a \cdot 2^n$$

Vi har alltså en lösning till den givna differensekvationen om vi tar $a = 1/4$, dvs en partikulärlösning $y_n^{(p)} = 2^{n-2}$ vilket leder till den allmänna lösningen

$$y_n = A + B(-2)^n + 2^{n-2}$$

Återstår villkoren $y_0 = 1$ och $y_1 = 2$ som är uppfyllda precis då $A + B + 1/4 = 1$ och $A - 2B + 1/2 = 2$ dvs då $A = 1$ och $B = -1/4$. Alltså är lösningen

$$y_n = 1 - \frac{1}{4} \cdot (-2)^n + 2^{n-2} = 1 + 2^{n-2} \cdot (1 + (-1)^n).$$

4. (a) Serien är en geometrisk serie med kvoten $x^2/3$. En geometrisk serie $\sum_{n=0}^{\infty} t^n$ konvergerar om och endast om $|t| < 1$, dess summa är då $1/(1-t)$. I vårt fall har vi $t = x^2/3$ så den är konvergent om och endast om $|x| < \sqrt{3}$. Konvergensradien är alltså $\sqrt{3}$ och seriens summa är

$$\frac{1}{1 - \frac{x^2}{3}} = \frac{3}{3 - x^2}.$$

(b) Serien är av formen

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ där } a_n = \frac{1}{3^n + n^2}.$$

Vi har då

$$|a_n x^n|^{1/n} = \frac{|x|}{3(1 + n^2 \cdot 3^{-n})} \to \frac{|x|}{3} \text{ då } n \to \infty.$$

Rotkriteriet ger därför att serien är konvergent om $|x| < 3$ och divergent om $|x| > 3$. Konvergensradien är alltså 3.

5. Om vi skriver ekvationen på följdform har vi

$$\{y_{n+2}\} + 6\{5^n\} \star \{y_n\} = \{0\}.$$

Eftersom $y_0 = 1$ och $y_1 = 0$ har $\{y_{n+2}\}$ z-transformen $z^2 Y(z) - z^2$. Faltningssatsen för z-transformen ger därför att ekvationen efter transformering kan skrivas

$$z^2 Y(z) - z^2 + \frac{6z}{z-5} \cdot Y(z) = 0$$

vilket leder till

$$(z^2 + \frac{6z}{z-5}) Y(z) = z^2$$

och alltså

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{z-5}{z^2 - 5z + 6} = \frac{z-5}{(z-2)(z-3)} = \frac{3}{z-2} - \frac{2}{z-3}.$$

Detta ger

$$Y(z) = 3 \cdot \frac{z}{z-2} - 2 \cdot \frac{z}{z-3}$$

varför

$$y_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 3^n.$$

6. Låt $H(s)$ vara systemets överföringsfunktion. Då gäller sambandet $Y(s) = H(s)X(s)$ mellan ut- och insignalernas laplacetransformer.

   (a) I detta fall har vi $X(s) = 1/(s+1)$ och $Y(s) = 1/(s+2)^2$ vilket leder till
   $$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{s+1}{(s+2)^2}$$

   (b) $H(s)$ kan också skrivas på som
   $$H(s) = \frac{1}{s+2} - \frac{1}{(s+2)^2}$$
   som är laplacetransform av
   $$h(t) = (1-t)e^{-2t}u_0(t)$$
   vilket därmed är systemets impulssvar.

   (c) Skickar vi $x(t) = e^{-2t}$ som insignal får vi för utsignalen
   $$Y(s) = H(s)X(s) = \frac{s+1}{(s+2)^3} = \frac{1}{(s+2)^2} - \frac{1}{(s+2)^3}$$
   och därmed
   $$y(t) = (t - \frac{t^2}{2}) \cdot e^{-2t}u_0(t).$$

7. Funktionen $f(t) = |\cos t|$ är periodisk med perioden π. Dess laplacetransform $F(s)$ ges därför av
$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \int_0^{\pi} |\cos t| \cdot e^{-st}\, dt.$$
För integralen har vi
$$\int_0^{\pi} |\cos t| \cdot e^{-st}\, dt = \int_0^{\pi/2} \cos t \cdot e^{-st}\, dt - \int_{\pi/2}^{\pi} |\cos t| \cdot e^{-st}\, dt.$$
En primitiv funktion till $\cos t \cdot e^{-st}$ får vi som realdelen av
$$\int e^{it}e^{-st}\, dt = \int e^{it-st}\, dt = -\frac{e^{it-st}}{s-i} = -e^{it}(s+i) \cdot \frac{e^{-st}}{s^2+1}$$
Detta gör att
$$\int_0^{\pi/2} e^{it}e^{-st}\, dt = (s+i) \cdot \frac{1-e^{i\pi/2}e^{-\pi s/2}}{s^2+1} = (s+i) \cdot \frac{1-ie^{-\pi s/2}}{s^2+1}$$
vars realdel ger
$$\int_0^{\pi/2} \cos t \cdot e^{-st}\, dt = \frac{s+e^{-\pi s/2}}{s^2+1}.$$
På samma sätt har vi
$$\int_{\pi/2}^{\pi} e^{it}e^{-st}\, dt = (s+i) \cdot \frac{e^{i\pi/2}e^{-\pi s/2} - e^{i\pi}e^{-\pi s}}{s^2+1} = (s+i) \cdot \frac{ie^{-\pi s/2} - e^{-\pi s}}{s^2+1}$$
vars realdel ger
$$\int_{\pi/2}^{\pi} |\cos t| \cdot e^{-st}\, dt = -\frac{e^{-\pi s/2} + se^{-\pi s}}{s^2+1}$$
Sammantaget har vi därför
$$\int_0^{\pi} |\cos t| \cdot e^{-st}\, dt = \frac{s + 2e^{-\pi s/2} + se^{-\pi s}}{s^2+1}$$
vilket gör att den sökta transformen därför är
$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-\pi s}} \cdot \frac{s+2e^{-\pi s/2}+se^{-\pi s}}{s^2+1}.$$
En annan form på svaret är
$$\frac{1+e^{-\pi s}}{1-e^{-\pi s}} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{2e^{-\pi s/2}}{1-e^{-\pi s}} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \frac{1}{\tanh \frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{\sinh \frac{\pi s}{2}} \cdot \frac{1}{s^2+1}$$

8. (a) $y_3 = 3^2 + 1 = 10$.

   (d) Till exempel $f(t) = e^{t^2}$.