Lösningar till TMV050 Transformer och matematisk programvara för I2 aug-08

1. Vid laplacetransformering får vi

$$(s^2-9)Y(s)=\frac{24}{s-1}$$

dvs

$$Y(s)=\frac{24}{(s-3)(s+3)(s-1)}$$

som efter vanlig partialbråksuppdelning leder till

$$Y(s)=\frac{2}{(s-3)}+\frac{1}{(s+3)}-\frac{3}{(s-1)}$$

och alltså

$$y(t)=2e^{3t}+e^{-3t}-3e^{t}.$$

2. Funktionen är jämn så inga sinustermer finns med i serien. Vidare gäller då för cosinuskoefficienterna

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos nt\,dt=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(t)\cos nt\,dt.$$

För $n=0$ har vi

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-t)\,dt=0$$

medan vi för $n>0$ har

$$\frac{\pi}{2}a_n=\int_0^{\pi}(\frac{\pi}{2}-t)\cos nt\,dt.$$

Partiell integration ger här

$$\frac{\pi}{2}a_n=\left[(\frac{\pi}{2}-t)\cdot\frac{\sin nt}{n}\right]_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}(-1)\sin nt\,dt=0-0-\frac{1}{n}\left[\frac{\cos nt}{n}\right]_0^{\pi}=\frac{1-\cos n\pi}{n^2}.$$

Detta ger att

$$a_n=\begin{cases}0 & \text{om } n \text{ är jämnt}\\ \frac{4}{\pi n^2} & \text{om } n \text{ är udda}\end{cases}$$

Den sökta fourierserien är alltså

$$f(t)\sim\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\cos(2k+1)t}{(2k+1)^2}.$$

3. Differentialekvationen har karakteristisk ekvation

$$r^2-6r+8=0$$

med rötterna $r=2$ och $r=4$. Lösningarna $y_n^{(h)}$ till motsvarande homogena ekvation är alltså

$$y_n^{(h)}=A\cdot 2^n+B\cdot 4^n.$$

För en partikulärlösning ansätter vi $y_n=C\cdot 3^n$ vilket i ekvationen ger

$$C(3^{n+2}-6\cdot 3^{n+1}+8\cdot 3^n)=3^n$$

som är uppfyllt om

$$C(9-18+8)=1 \text{ dvs } C=-1.$$

Den inhomogena ekvationen har då den allmänna lösningen

$$y_n=A\cdot 2^n+B\cdot 4^n-3^n$$

och det återstår att få villkoren $y_0=0$ och $y_1=2$ uppfyllda. Det ger $A+B-1=1$ respektive $2A+4B-3=2$ som har lösningen $A=3/2$ och $B=1/2$ vilket leder till

$$y_n=\frac{3}{2}\cdot 2^n+\frac{1}{2}\cdot 4^n-3^n=3\cdot 2^{n-1}+2\cdot 4^{n-1}-3^n$$

4. Med hjälp av z-transformering får vi

$$z^2Y(z) - z^2 - 2z - 6(zY(z) - z) + 8Y(z) = \frac{z}{z-3}.$$

Eftersom $z^2 - 6z + 8 = (z-2)(z-4)$ har vi

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{1}{(z-2)(z-3)(z-4)} + \frac{z-4}{(z-2)(z-4)} = \frac{3}{2}\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-4}$$

och alltså

$$Y(z) = \frac{3}{2}\frac{z}{z-2} - \frac{z}{z-3} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-4}.$$

Detta ger

$$y_n = \frac{3}{2} \cdot 2^n - 3^n - \frac{1}{2} \cdot 4^n = 3 \cdot 2^{n-1} + 2 \cdot 4^{n-1} - 3^n$$

5. (b)

$$f \star g(t) = \int_0^t f(t-u)g(u)\,du = \int_0^t e^{t-u}e^{2u}\,du = \int_0^t e^{t+u}\,du = \left[e^{t+u}\right]_0^t = e^{2t} - e^t.$$

(d) Laplacetransformerna av f och g är

$$F(s) = \frac{1}{s-1} \text{ respektive } G(s) = \frac{1}{s-2}.$$

Faltningen $f \star g$ har enligt (c) transformen $F(s)G(s)$ men

$$F(s)G(s) = \frac{1}{(s-1)(s-2)} = \frac{1}{s-2} - \frac{1}{s-1} \subset e^{2t} - e^t.$$

6. (a) Vi z-transformerar det första sambandet och får likheten

$$H(z) \cdot \frac{z}{z-2} = \frac{z}{z-\frac{1}{2}}$$

och alltså

$$H(z) = \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}}.$$

Den sökta följden har då z-transformen

$$Y(z) = H(z) \cdot \frac{z}{z-3} = \frac{z-2}{z-\frac{1}{2}} \cdot \frac{z}{z-3} = z \cdot \frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)}.$$

Vi ansätter partialbråksuppdelningen

$$\frac{z-2}{(z-\frac{1}{2})(z-3)} = \frac{A}{z-\frac{1}{2}} + \frac{B}{z-3}$$

där handpåläggning ger $A = 3/5$ och $B = 2/5$. Detta leder till

$$Y(z) = \frac{3}{5} \cdot \frac{z}{z-\frac{1}{2}} + \frac{2}{5} \cdot \frac{z}{z-3}$$

och alltså att den sökta följden är

$$y_n = \frac{3}{5} \cdot 2^{-n} + \frac{2}{5} \cdot 3^n.$$

(b) Vi använder även här z-transformering och får

$$X(z) \cdot \frac{z}{z-a} = \frac{z}{z-\frac{1}{a}}$$

dvs

$$X(z) = \frac{z-a}{z-\frac{1}{a}} = \frac{z}{z-\frac{1}{a}} - \frac{a}{z-\frac{1}{a}}.$$

Detta leder till

$$x_n = a^{-n} - a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^{n-1} = a^{-n} - a^{2-n} \text{ för } n = 1, 2, 3, \ldots$$

medan $x_0 = 1$.

7. Det räcker att visa att

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \text{ ,där } u_n(x) = \frac{x}{n^3 + x^2}$$

konvergerar likformigt på hela reella tallinjen. Med sikte mot att använda Weierstrass majorantsats undersöker vi maximum av $|u_n(x)|$. Eftersom $u_n(x)$ är en udda funktion räcker det att söka maximum av $|u_n(x)|$ för $x \geq 0$, men där gäller i detta fall $|u_n(x)| = u_n(x)$. Vi deriverar och får

$$u_n'(x) = \frac{1 \cdot (n^3 + x^2) - x \cdot 2x}{(n^3 + x^2)} = \frac{n^3 - x^2}{(n^3 + x^2)}.$$

Här ser vi att derivatan är 0 då $x = n^{3/2}$ och derivatans teckenväxling i denna punkt visar att detta x-värde ger maximum av $u_n(x)$. För alla x gäller därför olikheten

$$|u_n(x)| \leq \frac{n^{3/2}}{n^3 + n^3} = \frac{1}{2n^{3/2}}.$$

Eftersom

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

konvergerar om $p > 1$ ser vi att

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n^{3/2}}$$

konvergerar. Därmed ger Weierstrass sats att den ursprungliga serien konvergerar likformigt på hela tallinjen och att alltså gränsfunktionen $s(x)$ är kontinuerlig för alla x.

8. (c) Vi använder rotkriteriet och låter

$$a_k = \frac{x^k}{3^k + 1}.$$

Då gäller

$$|a_k|^{1/k} = \frac{|x!}{(3^k + 1)^{1/k}} = \frac{|x|}{(3^k + 1)^{1/k}} = \frac{|x|}{3(1 + 3^{-k})^{1/k}} \to \frac{|x|}{3}$$

då $k \to \infty$. Serien är alltså konvergent om detta gränsvärde är mindre än ett och divergent om det är större än ett. Detta ger att konvergensradien är 3