

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 3:e februari.

1. Låt $f(t) = e^t$ och $g(t) = e^{2t}$ för positiva t , medan båda funktionerna är 0 för negativa t .
 - (a) Bestäm faltningen av de båda funktionerna genom att använda definitionen av begreppet faltning. (3p)
 - (b) Bestäm nu faltningen av de båda funktionerna genom att istället använda resultat om laplace-transformer. (3p)
2. Låt funktionen f vara periodisk med period 2π och definierad genom att för $-\pi \leq t < 0$ är $f(t) = -1$, medan för $0 \leq t < \pi$ är $f(t) = t$.
 - (a) Bestäm funktionens fourierkoefficienter. (4p)
 - (b) Bestäm fourierseriens summa i vart och ett av $t = 0$, $t = \pi/2$ och $t = \pi$. (2p)
 - (c) Beräkna (exempelvis med hjälp av (b)) summan av serien (2p)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}.$$

3. Betrakta differensekvationen

$$y_{n+2} - 6y_{n+1} + 8y_n = 3^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med $y_0 = 0$ och $y_1 = 2$.

- (a) Lös ekvationen med hjälp av z -transformen. (6p)
 - (b) Lös ekvationen utan att använda z -transformen. (6p)
4. Betrakta systemet av differentialekvationer

$$\begin{cases} x_1' &= x_1 + 2x_2 \\ x_2' &= 2x_1 - 2x_2 \end{cases}$$

med $x_1(0) = 1$, $x_2(0) = 3$. Lös detta med hjälp av laplacetransformering. (6p)

5. Antag att a är ett reellt tal så att $a > 1$.

- (a) Visa att genom

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nt}{a^n}$$

definieras f som en kontinuerlig funktion på hela reella axeln. (3p)

- (b) Bevisa att med f som i (a) så gäller (3p)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(t))^2 dt = \frac{\pi}{a^2 - 1}.$$

6. (Matlabuppgift) Skriv matlabkod för att åstadkomma vart och ett av följande.

(a) Rita kurvan $y = x^2 + e^{-x}$ på intervallet $[0,2]$. (3p)

(b) Lösa ekvationssystemet (3p)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 8 \\ 4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 27 \end{cases}$$

7. (a) Hur definieras laplacetransformen av en funktion? (1p)

(b) Bestäm laplacetransformen av $u_1(t)$ med hjälp av definitionen av laplacetransformen. Här är som i boken $u_1(t)$ enhetsstegfunktionen med språng i punkten 1. (1p)

(c) Om laplacetransformen av en funktion $f(t)$ är $F(s)$ så är $sF(s) - f(0)$ laplacetransformen av funktionens derivata. Bevisa detta samband. (4p)

/J-E A