

Skriv namn och personnummer
på varje inlämnat papper, dessutom
linje och inskrivningsår på omslaget.

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 29:e augusti..

1. Lös differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

$$\text{med } y_0 = 0, \quad y_1 = 1.$$

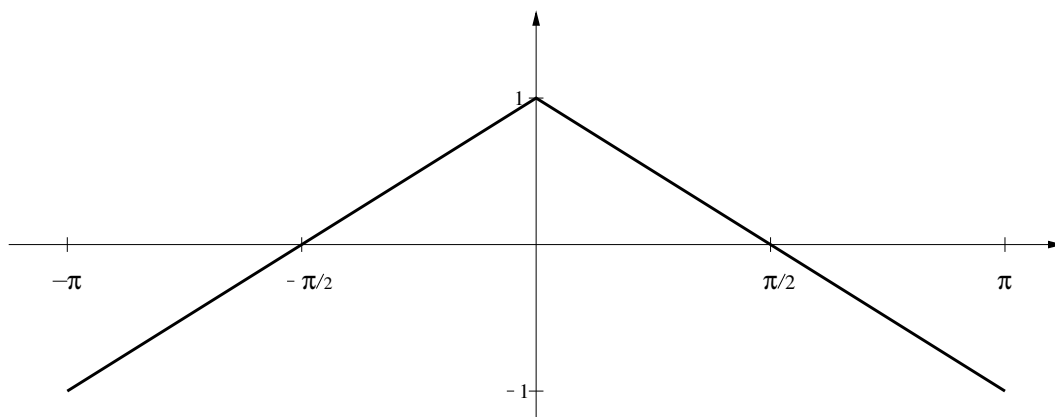
2. Betrakta den funktion f definierad för $t \geq 0$ som uppfyller

$$f(t) + \int_0^t f(u) \sin(t-u) du = \cos t$$

- (a) Bestäm laplacetransformen av f . (4p)

- (b) Bestäm funktionen f . (2p)

3. Betrakta den funktion som på intervallet $[-\pi, \pi]$ har följande graf.



- (a) Utveckla funktionen i en fourierserie. (5p)

- (b) Utnyttja (a) för att bestämma (2p)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$$

- (c) Utnyttja också (a) för att bestämma (2p)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4}$$

VÄND!

4. Låt $f(t) = 1 - t$ då $0 \leq t \leq 1$ medan $f(t) = 0$ för övriga t -värden. Bestäm den lösning till differentialekvationen

$$y'' + y = f(t)$$

som uppfyller $y(0) = y'(0) = 0$. (7p)

5. Antag att lösningen till en differensekvation av formen

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0$$

med $y_0 = c$ och $y_1 = d$ har z -transformen (6p)

$$Y(z) = \frac{2z^2 + 7z}{z^2 + 3z + 5}.$$

Bestäm talen a , b , c och d .

6. (a) För vilka värden på det reella talet α konvergerar funktionsföljden $\{n^\alpha x^n(1-x)\}$ punktvis på intervallet $[0, 1]$? (2p)
(b) För vilka värden på det reella talet α konvergerar funktionsföljden $\{n^\alpha x^n(1-x)\}$ likformigt på intervallet $[0, 1]$? (4p)
(c) Visa att funktionsserien

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha x^n (1-x)$$

oavsett värde på α konvergerar punktvis för alla x i intervallet $[0, 1]$ och att konvergensen är likformig åtminstone om $\alpha < 0$. (3p)

7. I boken genomförs ett bevis för att om en potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar i en punkt $x_0 \neq 0$ så konvergerar serien för alla x sådana att $|x| < |x_0|$.

- (a) Genomför detta bevis! (5p)
(b) Ge exempel på en potensserie som är konvergent för $x = -1$ men inte för $x = 1$, med åtminstone en kortfattad motivering till varför förutsättningarna är uppfyllda. (2p)

/J-E A