

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 10:e november. Lycka till!

1. Bestäm med hjälp av laplacetransformering lösningen $y = y(t)$ till följande begynnelsevärdesproblem (6p)

$$y'' - 9y = 24e^t, \quad y(0) = y'(0) = 0$$

2. (a) Bestäm fourierserien med period 2π till den periodiska funktion $f(x)$ som uppfyller $f(x) = |x|$ på intervallet $[-\pi, \pi]$. (4p)
(b) Använd resultatet i (a) för att bestämma summan av serien (2p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

3. (a) Bestäm den talföljd vars z -transform är (2p)

$$\frac{z^2}{z^2 - z + 1}$$

- (b) Antag att $\{y_n\}_0^\infty$ har z -transformen (2p)

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2 z^n}.$$

Bestäm y_3 , motivering behövs inte.

- (c) Antag att man utvecklar funktionen $f(t) = t$ i en sinusserie på intervallet $[0, \pi]$. Vad är då denna series summa i punkten $t = -\pi/2$? (1p)
(d) Antag att man utvecklar funktionen $f(t) = t$ i en cosinusserie på intervallet $[0, \pi]$. Vad är då seriens summa i punkten $t = -\pi/2$? (1p)
4. Bestäm konvergensradien till potensserien (6p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k+3}{k} \frac{x^k}{2^k}$$

VÄND!

5. Funktionerna $f(t)$ och $g(t)$ är båda 0 för negativa t medan det för övriga t gäller

$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{då } n \cdot 2\pi \leq t < \pi + n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots \\ -1 & \text{då } \pi + n \cdot 2\pi \leq t < 2\pi + n \cdot 2\pi, n = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

respektive

$$g(t) = \begin{cases} \sin t & \text{då } 0 \leq t < \pi \\ 2 \sin t & \text{då } \pi \leq t < \infty \end{cases}$$

Bestäm funktionen $y = y(t)$ så att faltningen $y \star f$ uppfyller (6p)

$$y \star f(t) = g(t)$$

för $t > 0$. Rita också grafen för $y(t)$.

6. Låt

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}}{n^2 + 1}$$

för varje x sådant att serien konvergerar.

(a) Visa att funktionen f existerar och är kontinuerlig på intervallet $0 \leq x < \infty$. (2p)

(b) Visa att funktionens förstaderivata och andraderivata existerar på intervallet $0 < x < \infty$.
(Ledning: Det räcker att visa att de serier, som man får vid termvis derivering, konvergerar likformigt på intervallet $[a, \infty)$ om $a > 0$.) (2p)

(c) Bevisa att funktionen satisfierar differentialekvationen (4p)

$$y'' + y = \frac{1}{1 - e^{-x}}$$

för $x > 0$.

7. (Teoriuppgift)

(a) Bevisa att om följderna $\{y_n\}_0^\infty$ har z -transformen $Y(z)$ så har följderna $\{y_{n+1}\}_0^\infty$ transformen $zY(z) - zy_0$. (3p)

(b) Antag att följderna $\{x_n\}_0^\infty$ har z -transformen $X(z)$ och att följderna $\{y_n\}_0^\infty$ har transformen $Y(z)$. Bevisa att då har faltningen $\{x_n\} \star \{y_n\}$ z -transformen $X(z)Y(z)$. (3p)

8. Tilläggsuppgift, bara för den som inte gjort alla datorlabbarna.

Lös differensekvationen

(6p)

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = \cos \frac{n\pi}{2}, y_0 = y_1 = 0$$

/J-E A