

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 3:e februari. Lycka till!

1. Lös följande differensekvation (6p)

$$y_{n+2} - y_{n+1} - 2y_n = 2^n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

2. (a) Bestäm fourierserien med period 2π till funktionen (4p)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{då } |x| < \frac{\pi}{2} \\ 1 & \text{då } \frac{\pi}{2} < |x| < \pi \end{cases}$$

- (b) Använd resultatet i (a) för att bestämma summan av serien (2p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$$

- (c) Använd resultatet i (a) för att bestämma summan av serien (2p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}$$

3. Lös följande begynnelsevärdesproblem med hjälp av laplacetransform (6p)

$$\begin{cases} y_1' = 2y_2 \\ y_2' = -2y_1 \end{cases}$$

med $y_1(0) = 0$ och $y_2(0) = 1$.

4. Bestäm konvergensradierna för följande potensserier

- (a) (3p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + 1}$$

- (b) (3p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n}$$

5. Låt $\{d_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara talföljden med $d_0 = 1$, $d_1 = -2$ och med $d_n = 0$ för $n \geq 2$. Lös differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = d_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

då $y_0 = 1$, $y_1 = 2$.

VÄND!

6. Antag att a är ett positivt reellt tal och betrakta funktionsföljden $\{f_n(x)\}_1^\infty$ på intervallet $[0,1]$ där

$$f_n(x) = \frac{n^a x}{n^2 x^2 + 1}.$$

- (a) För vilka värden på a konvergerar följden punktvis på $[0, 1]$? (2p)
(b) För vilka av dessa värden på a är gränsvfunktionen kontinuerlig på $[0, 1]$? (1p)
(c) För vilka värden på a konvergerar följden likformigt mot gränsvfunktionen på $[0, 1]$? (3p)

7. (Teoriuppgift.)

- (a) Bevisa att för laplacetransformen gäller (3p)

$$f'(t) \supset sF(s) - f(0)$$

där $F(s) \subset f(t)$.

- (b) Formulera och bevisa faltningssatsen för laplacetransformer. (3p)

8. Tilläggsuppgift, bara för den som inte gjort alla datorlabbarna ht03.

Bestäm en lösning till integralekvationen (6p)

$$y(t) = t + \int_0^t y(t-u) u \, du, \quad t \geq 0$$

/J-E A