

Skriv namn och personnummer  
på varje inlämnat papper, dessutom  
linje och inskrivningsår på omslaget.

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 25:e augusti. Lycka till!

1. Antag att karakteristiska ekvationen till differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} + by_{n+1} + cy_n = 0 \quad n = 0, 1, \dots$$

har rötterna 2 och  $a$ , där  $a$  är ett reellt tal. Bestäm för varje  $a$  den talföljd  $\{y_n\}_0^\infty$  som uppfyller  $y_0 = 0$  och  $y_1 = 1$ .

2. Bestäm konvergensradierna till följande potensserier

- (a) (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{2k}}{3^k + 1}$$

- (b) (3p)

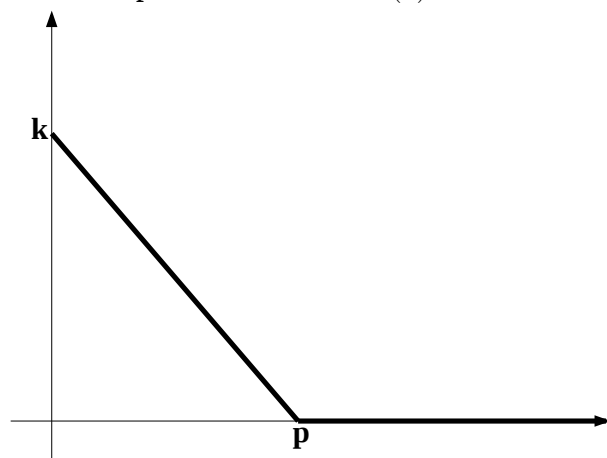
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} x^k$$

3. I matematikhandboken BETA hittar man om fourierserier bland mycket annat formeln (6p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2n+1)t}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ för } 0 < t < \pi.$$

Bevisa denna formel.

4. (a) Bestäm laplacetransformen  $F(s)$  av funktionen i nedanstående figur (3p)



- (b) Rita grafen för den funktion vars laplacetransform är (3p)

$$\frac{F(s)}{1 - e^{-ps}}$$

där  $F(s)$  är som i (a). (Man behöver inte ha gjort (a) för att göra (b)!)

VÄND!

5. (a) Definiera faltningen  $\{x_n\} \star \{y_n\}$  av de två talföljderna  $\{x_n\}$  och  $\{y_n\}$ . (1p)

(b) Låt

$$x_n = \frac{2^n}{n!} \text{ och } y_n = \frac{3^n}{n!}.$$

Bestäm faltningen med hjälp av  $z$ -transformen  $\{x_n\} \star \{y_n\}$ . (3p)

- (c) Bestäm faltningen  $\{x_n\} \star \{y_n\}$  för samma  $\{x_n\}$  och  $\{y_n\}$  som i (b) men nu utan att använda  $z$ -transformen. (3p)

6. Genom sambandet

$$f(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n} \cos nx$$

definieras en funktion  $f$  som är kontinuerlig på hela reella axeln. Beräkna (6p)

$$\int_{-\pi}^{\pi} (f(x))^2 dx.$$

7. (a) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd  $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$  konvergerar punktvis på en mängd  $M$ . (1p)
- (b) Definiera vad som menas med att en funktionsföljd  $\{f_n(x)\}_1^{\infty}$  konvergerar likformigt på en mängd  $M$ . (2p)
- (c) På vilka intervall av formen  $[0, a]$  konvergerar funktionsföljden  $\{x^n\}_1^{\infty}$  likformigt? Motivering krävs. (2p)
- (d) Vad säger Weierstrass majorantsats? (2p)

**8. Tilläggsuppgift, bara för den som inte gjort alla datorlabbarna ht03.**

Låt  $f(t)$  vara definierad för  $t \geq 0$  och ha laplacetransformen

$$F(s) = \frac{(s+1)e^{-\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Bestäm den lösning  $y(t)$  till differentialekvationen (6p)

$$y'(t) + y(t) = f(t), \quad t \geq 0$$

som uppfyller  $y(0) = 1$ .

/J-E A