

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdiggrättade den 28:e augusti. Granskningstider anslås då på kurshemsidan. För betyget 3 krävs 25p, för betyget 4 krävs 32p och för betyget 5 krävs 40p. Lycka till!

1. Antag funktionen $f(x)$ är udda och periodisk med period 2π . Antag vidare att $f(x) = 1$ då $0 < x < \pi$.

(a) Bestäm funktionens fourierserie. (4p)

(b) Använd resultatet i (a) för att bestämma (2p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2}.$$

2. Betrakta differensekvationen

$$y_{n+2} - 5y_{n+1} + 6y_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

med $y_0 = 1$ och $y_1 = 0$.

(a) Lös differensekvationen utan hjälp av z -transformen. (4p)

(b) Lös differensekvationen med hjälp av z -transformen. (6p)

3. Bestäm konvergensradierna för följande två serier

(a) (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{2^k + k^2}$$

(b) (3p)

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k!)^2}{(2k)!} x^k$$

4. Betrakta differentialekvationen $y'' + y = f(t)$ för $t \geq 0$ med $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$, där $f(t) = 1 - t$ då $0 \leq t < 1$ och $f(t) = 0$ då $t \geq 1$.

(a) Bestäm laplacetransformen av funktionen $f(t)$. (2p)

(b) Bestäm laplacetransformen $Y(s)$ av lösningen till differentialekvationen. (2p)

(c) Bestäm lösningen $y(t)$. (2p)

VÄND!

5. (a) Antag att man definierar en funktion f genom (3p)

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{k^2 + 1} + \frac{\sqrt{k} \sin kx}{k^2 + 1} \right)$$

Är då funktionen definierad och kontinuerlig för alla reella tal x ?

- (b) Finns det någon funktion som är kontinuerlig på $[-\pi, \pi]$ och har fourierserien (3p)

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\cos kx}{k^2 + 1} + \frac{\sqrt{k} \sin kx}{k + 1} \right) ?$$

6. (a) Hur definieras faltning av två funktioner f och g vilka båda är 0 på negativa reella axeln? (1p)
- (b) Använd definitionen för att bestämma faltningen av funktionerna $f(t) = e^t H(t)$ och $g(t) = e^{2t} H(t)$, där som vanligt $H(t)$ är Heavisides stegfunktion. (2p)
- (c) Formulera och bevisa faltningssatsen för laplacetransformer. (5p)
- (d) Använd satsen i (c) för att bestämma faltningen i (b). (2p)

7. Tilläggsuppgift, bara för den som inte gjort alla datorlabbarna.

Lös differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} + 2 \sum_{k=0}^n 2^{n-k} y_k = 0; \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0$$

/J-E A