

Observera att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 27:e januari. Granskningstider anslås då på kurshemsidan. För betyget 3 krävs 25p, för betyget 4 krävs 32p och för betyget 5 krävs 40p. Lycka till!

1. Funktionen $f(x)$ är periodisk med perioden 2π och uppfyller $f(x) = 0$ då $-\pi < x < 0$ och $f(x) = 1$ då $0 < x < \pi$.

(a) Bestäm funktionens fourierserie. (4p)

(b) Använd fourierserien för att bestämma (2p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}.$$

(c) Använd fourierserien för att bestämma (2p)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

2. Lös med hjälp av laplacetransformering begynnelsevärdesproblemet (6p)

$$y'' + 4y = 5e^{-t}, \quad y(0) = 1, y'(0) = 2$$

3. Bestäm den lösning (valfri metod) till differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

som uppfyller $y_0 = 0, y_1 = 1$.

4. (a) Bestäm laplacetransformen av den funktion $f(t)$ som uppfyller (3p)

$$f(t) = \begin{cases} t & \text{då } 0 \leq t \leq 1 \\ 2-t & \text{då } 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & \text{för övriga värden på } t \end{cases}$$

(b) Bestäm den funktion vars laplacetransform är (3p)

$$F(s) = \frac{se^{-\pi s}}{s^2 + 2s + 2}.$$

5. Antag att ett linjärt, kausalt och tidsinvariant diskret filter har egenskapen att insignalen $\{2^n\}$ ger utsignalen $\{2^{-n}\}$. Vilken utsignal får man då insignalen är $\{3^n\}$? (6p)

VÄND!

6. Antag att a är en reell, positiv parameter och betrakta serien

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^a}{(1+x)^n}.$$

(a) Bestäm seriens summa för alla $x \geq 0$. (1p)

(b) Visa att serien konvergerar likformigt på intervallet $[0, \infty[$ om $a = 2$ men däremot inte om $a = 1$ (5p)

7. (Teoriuppgift)

(a) Bevisa att om följderna $\{y_n\}_0^\infty$ har z -transformen $Y(z)$ så har följderna $\{y_{n+1}\}_0^\infty$ transformen $zY(z) - zy_0$. (3p)

(b) Antag att följderna $\{x_n\}_0^\infty$ har z -transformen $X(z)$ och att följderna $\{y_n\}_0^\infty$ har transformen $Y(z)$. Bevisa att faltningen $\{x_n\} \star \{y_n\}$ då har z -transformen $X(z)Y(z)$. (3p)

8. Tilläggsuppgift, bara för den som inte gjort alla datorlabbarna.

Bestäm konvergensradierna för följande två potensserier (3p per styck)

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + n^3}{3^n + n^2} x^n$$

/J-E A