

Observera att inga poäng från datorlabbar gäller längre, så alla uppgifter skall göras. Observera också att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida senast dagen efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigställda den 16:e september. Rättningen kan därpå granskas på expeditionen i Matematiska vetenskaper. Denna har öppet varje vardag 9-13. För betyget 3 krävs 20p, för betyget 4 krävs 30p och för betyget 5 krävs 40p. Lycka till!

1. Bestäm med hjälp av laplacetransformering den funktion $y(t)$ som uppfyller

$$y''(t) + 4y(t) = e^{-t}, t > 0,$$

med $y(0) = 1$ och $y'(0) = 0$. (6p)

2. Betrakta differensekvationen

$$y_{n+2} - 8y_{n+1} + 7y_n = 5 \cdot 2^n, n = 0, 1, 2, \dots$$

med $y_0 = 1$ och $y_1 = 0$. Bestäm lösningen utan z -transformering. (6p)

3. Lös problemet i föregående uppgift med hjälp av z -transformering. (6p)

4. Betrakta den funktion $x(t)$ som är periodisk med period 2 och som uppfyller

$$x(t) = \begin{cases} 3 & \text{då } 0 < t < 1 \\ 0 & \text{då } -1 < t < 0 \end{cases}$$

(a) Bestäm funktionens trigonometriska fourierserie. (5p)

(b) Vilket värde konvergerar serien i (a) mot då $t = 1$? (1p)

5. Bestäm den funktion $y(t)$ som uppfyller (6p)

$$y(t) + \int_0^t y(u) du = \sin 2t + \delta(t - \pi), t > 0.$$

6. Antag att för ett diskret kausalt linjärt system gäller att om man sänder följden $\{1^n\}_0^\infty$ som insignal så är följden $\{1 - 0.2^n\}_{n=0}^\infty$ utsignal.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (3p)

(b) Vad blir utsignalen om man sänder följden $\{0.1^n\}_0^\infty$ som insignal? (3p)

VÄND!

7. Antag att $f(t)$ och $g(t)$ är kontinuerliga periodiska funktioner med perioden 2π . Låt oss definiera en ny funktion $h(t)$ genom

$$h(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u) du.$$

(a) Visa att också $h(t)$ är periodisk med perioden 2π . (1p)

(b) Visa att (2p)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t-u)g(u) du = \int_{-\pi}^{\pi} f(u)g(t-u) du.$$

(c) Antag att $f(t)$ och $g(t)$ dessutom är jämna. Visa att då är också $h(t)$ jämn. (2p)

(d) Antag även här att $f(t)$ och $g(t)$ är jämna. Deras fourierserieutvecklingar innehåller då inga sinustermer. Låt cosinuskoefficienterna vara $a_n(f)$ respektive $a_n(g)$ Visa att för koefficienterna $a_n(h)$ i fourierserien för $h(t)$ gäller

$$a_n(h) = a_n(f)a_n(g)$$

för $n = 0, 1, 2, \dots$ (3p)

Du får här använda egenskaperna i (a)-(c) även om du inte lyckats bevisa dem alla!

8. (a) Definiera vad som menas med konvergensraden för en potensserie. (1p)

(b) Bevisa det resultat i boken som säger att om en potensserie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ konvergerar för $x = x_0$ där $x_0 \neq 0$ så är serien konvergent för alla x med $|x| < |x_0|$. (5p)

/J-E A