

Skriv namn och personnummer
på varje inlämnat papper, dessutom
linje och inskrivningsår på omslaget.

Datum: 2008-01-15 kl 8.30-12.30

Hjälpmedel: Formelblad (bifogas), typgodkänd räknare

Telefonvakt: 0762-721860 Mikael Persson

Observera att inga poäng från datorlabbar gäller längre, så alla uppgifter skall göras. Observera också att alla lösningar skall motiveras om inte annat sägs. Lösningar läggs in på kursens hemsida senast dagen efter tentan. Skrivningarna beräknas vara färdigrättade den 25:e januari. Rättningen kan därpå granskas på expeditionen i Matematiska vetenskaper. Denna har öppet varje vardag 9-13. För betyget 3 krävs 20p, för betyget 4 krävs 30p och för betyget 5 krävs 40p. Lycka till!

1. Bestäm med hjälp av laplacetransformering den funktion $y(t)$ som uppfyller

$$y''(t) + 4y'(t) + 3y(t) = e^{-2t}, \quad t > 0,$$

$$\text{med } y(0) = y'(0) = 0. \quad (6p)$$

2. Låt $f(t)$ vara periodisk med perioden π och på intervallet $[0, \pi[$ uppfylla $f(t) = t$.

(a) Rita funktionens graf på intervallet $[-2\pi, 2\pi]$. (1p)

(b) Visa att den trigonometriska fourierserien för $f(t)$ är (3p)

$$\frac{\pi}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin 2kt}{k}.$$

(c) Bestäm med hjälp av (b) summan av $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$. (2p)

3. Lös med valfri metod differensekvationen (6p)

$$y_{n+2} + y_{n+1} - 2y_n = 2^n$$

$$\text{med villkoren } y_0 = 1 \text{ och } y_1 = 2.$$

4. (a) Bestäm konvergensradien för potensserien (4p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{3^n}.$$

Bestäm också seriens summa för de x för vilka serien konvergerar.

- (b) Bestäm konvergensradien för potensserien (2p)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n + n^2}.$$

VÄND!

5. Lös differensekvationen

(6p)

$$y_{n+2} + 6 \sum_{k=0}^n 5^{n-k} y_k = 0; \quad y_0 = 1, \quad y_1 = 0$$

6. Antag att för ett linjärt kontinuerligt kausalt tidsinvariant system gäller att om man som insignal sänder funktionen $x(t) = e^{-t}u_0(t)$ så får man utsignalen $y(t) = te^{-2t}u_0(t)$.

(a) Bestäm systemets överföringsfunktion. (2p)

(b) Bestäm systemets impulssvar. (2p)

(c) Vilken utsignal får man om man har $x(t) = e^{-2t}u_0(t)$ som insignal? (2p)

7. Bestäm laplacetransformen av $f(t) = |\cos t|$. (6p)

8. (a) Antag att en följd $\{y_n\}_0^\infty$ har z -transformen

$$Y(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 1}{z^n}.$$

Vilket värde har y_3 ? (1p)

(b) Ett specialfall av en formel i boken säger att om en följd $\{y_n\}_0^\infty$ har z -transformen $Y(z)$ så har följden $\{y_{n+1}\}_0^\infty$ z -transformen $zY(z) - zy_0$. Bevisa detta specialfall. (3p)

(c) För laplacetransformer använder man ofta den regel som säger att om $f(t)$ har transformen $F(s)$ så har $f'(t)$ transformen $sF(s) - f(0)$. Bevisa denna regel. (3p)

(d) Ge exempel på en funktion som är kontinuerlig på intervallet $[0, \infty[$ men som inte kan laplacetransformeras. (1p)

/J-E A