Några bevis med hjälp av linjär algebra

Bakgrund från linjär algebra

Vi betraktar vektorrum V med en skalärprodukt som vi skriver $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle$ och därigenom en norm $\|\mathbf{u}\| = \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}\rangle}$. I sådana rum gäller exempelvis Pythagoras sats

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2,$$

om $\mathbf{v}_1$ och $\mathbf{v}_2$ är ortogonala mot varandra, dvs $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\rangle = 0.$ Detta kan generaliseras genom induktion till att gälla flera parvis ortogonala vektorer så att

$$\|\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_n\|^2 = \|\mathbf{v}_1\|^2 + \|\mathbf{v}_2\|^2 + \ldots + \|\mathbf{v}_n\|^2$$

om $\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j\rangle = 0$ då $i \neq j$.

Vidare gäller **Cauchy-Schwarz olikhet**

$$|\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}\rangle| \leq \|\mathbf{u}\|\,\|\mathbf{v}\|.$$

Ett **ortogonalt system** är en samling vektorer sådana att varje par av olika vektorer är ortogonala mot varandra. Om det ursprungliga vektorrummet är oändligtdimensionellt kan ett ortogonalt system innehålla oändligt många vektorer.

Om man i V har ett underrum U som har en ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ så kan varje vektor $\mathbf{u}$ i U framtällas

$$\mathbf{u} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p$$

där

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i\rangle}{\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i\rangle} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i\rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \text{ för } i = 1, \ldots, p.$$

Detta följer av att

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{u}_i\rangle = \langle \sum_{j=1}^{p} c_j\mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i\rangle = \sum_{j=1}^{p} c_j\langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_i\rangle = c_i\langle \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i\rangle.$$

Ortogonala projektionen på ett underrum U av en vektor $\mathbf{v}$ i V defineras som den vektor proj $\mathbf{v} = \widehat{\mathbf{v}}$ i U sådan att $\mathbf{v} - \widehat{\mathbf{v}}$ är ortogonal mot varje vektor i U.

Om man i ett vektorrum V har ett underrum U som har en ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$, så framställs projektionen $\widehat{\mathbf{v}}$ av en vektor $\mathbf{v}$ i V på underrummet U genom

$$\widehat{\mathbf{v}} = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_1\rangle}{\|\mathbf{u}_1\|^2}\mathbf{u}_1 + \ldots + \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_p\rangle}{\|\mathbf{u}_p\|^2}\mathbf{u}_p$$

När vi nu skall använda resultaten på fourierserier så kommer vi att som det stora rummet ha $V = C[-\pi, \pi]$, rummet av kontinuerliga funktioner på intervallet $[-\pi, \pi]$ med skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\,dx.$$

För varje $n = 1, 2, \ldots$ är mängden

$$S_n = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$$

ett ortogonalt system och

$$S = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

ett oändligt ortogonalt system.

Bevis av sats 20.3

I rum med skalärprodukt ger projektionen den bästa approximationen. Bästa approximationen av en funktion f med ett trigonometriskt polynom av grad $\le n$ i den norm man får av skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

ges därför av projektionen av f på $T_n = \text{Span}\,\{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$.

Med $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\} = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ har vi eftersom

$$\|\cos kx\|^2 = \|\sin kx\|^2 = \pi$$

för $k = 1, 2 \ldots$ och $\|1\|^2 = 2\pi$ att projektionen av en godtycklig funktion f i $C[-\pi, \pi]$ på T_n ges av

$$\text{proj } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

där

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\, dx \text{ och } b_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\, dx.$$

Fourierkoefficienternas utseende

Om man i rummet V har en oändligt ortogonalt system $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots\}$ och vill framställa en vektor $\mathbf{v}$ på formen

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_i\mathbf{u}_i + \ldots$$

är det rimligt att tolka detta som

$$\lim_{p\to\infty} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\| = 0$$

där

$$\mathbf{v}_p = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p$$

Enligt resultaten från linjära algebran har vi då för $i = 1, 2, \ldots, p$

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_i\rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2} \text{ för } i = 1, \ldots, p.$$

Här kan vi göra omskrivningen

$$\langle \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_i\rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle + \langle \mathbf{v} - \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_i\rangle$$

och observera att Cauchy-Schwarz olikhet ger

$$|\langle \mathbf{v} - \mathbf{v}_p, \mathbf{u}_i\rangle| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\|\,\|\mathbf{u}_i\| \to 0 \text{ då } p \to \infty.$$

Detta ger att för alla i gäller

$$c_i = \frac{\langle \mathbf{v}, \mathbf{u}_i\rangle}{\|\mathbf{u}_i\|^2},$$

dvs koefficienterna i framställningen av $\mathbf{v}$ kan räknas ut på samma sätt som för ett ändligt ortogonalt system.

När man använder detta på rummet $V = C[-\pi, \pi]$, rummet med skalärprodukten

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx$$

med

$$\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_i, \ldots\} = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots\}$$

på en funktion f får man fourierserien för f.

Bevis av Bessels olikhet

Vid ortogonal projektion av en vektor $\mathbf{v}$ på ett underrum med ortogonal bas $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$ har vi

$$\widehat{\mathbf{v}} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p.$$

Den generella formen av Pythagoras sats ger

$$\|\widehat{\mathbf{v}}\|^2 = \|c_1\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + \|c_p\mathbf{u}_p\|^2$$

som med räknereglerna för normer ger

$$\|\widehat{\mathbf{v}}\|^2 = c_1^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + c_p^2\|\mathbf{u}_p\|^2.$$

För projektionen har vi dessutom olikheten $\|\widehat{\mathbf{v}}\| \le \|\mathbf{v}\|$ varifrån olikheten

$$c_1^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + c_p^2\|\mathbf{u}_p\|^2 \le \|\mathbf{v}\|^2$$

följer. När vi använder detta för systemet $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\} = \{1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx\}$ på funktionen f ges projektionen av

$$\text{proj } f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Eftersom vi för $k = 1, 2, \ldots$ har

$$\|\cos kx\|^2 = \|\sin kx\|^2 = \pi$$

och $\|1\|^2 = 2\pi$ så ger linjära algebran att

$$\|\text{proj } f\|^2 = \frac{a_0^2}{2^2} \cdot 2\pi + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2).$$

Olikheten $\|\text{proj } f\| \le \|f|$ ger då

$$\frac{a_0^2}{2} \cdot \pi + \pi \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Dividerar vi här med π och låter $n \to \infty$ får vi Bessels olikhet

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \le \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx.$$

Något om Parsevals formel

Parsevals formel handlar om likhet i Bessels olikhet. I en allmän formulering reduceras det till att Pythagoras sats går att generalisera vidare till en summa av oändligt många parvis ortogonala vektorer så att likheten

$$\mathbf{v} = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_i\mathbf{u}_i + \ldots$$

leder till

$$\|\mathbf{v}\|^2 = c_1^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + c_i^2\|\mathbf{u}_i\|^2 + \ldots.$$

Detta är möjligt om det är så att $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\| \to 0$ då $p \to \infty$, där som tidigare

$$\mathbf{v}_p = c_1\mathbf{u}_1 + \ldots + c_p\mathbf{u}_p.$$

Här är ju $\mathbf{v}_p$ ortogonala projektionen av $\mathbf{v}$ på underrummet som spänns upp av $\{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_p\}$. Av detta följer enligt Pythagoras att

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{v}_p + (\mathbf{v} - \mathbf{v}_p)\|^2 = \|\mathbf{v}_p\|^2 + \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\|^2$$

vilket då $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\| \to 0$ leder till att

$$\|\mathbf{v}\|^2 = \lim_{p\to\infty} \|\mathbf{v}_p\|^2.$$

Eftersom $\|\mathbf{v}_p\|^2 = c_1^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + c_i^2\|\mathbf{u}_p\|^2$ följer det önskade resultatet

$$\|\mathbf{v}\|^2 = c_1^2\|\mathbf{u}_1\|^2 + \ldots + c_i^2\|\mathbf{u}_i\|^2 + \ldots.$$

I vårt rum $V = C[-\pi.\pi]$ kan man bevisa att för varje $\mathbf{v}$ gäller $\|\mathbf{v} - \mathbf{v}_p\| \to 0$ då $p \to \infty$. Detta går att generalisera till mycket generellare funktioner än sådana som är kontinuerliga på intervallet, även mycket mera generella än styckvis kontinuerliga. Men det är en annan historia som man kan läsa om i mera avancerade kurser än denna.