Dugga 1 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den LILA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. Om vi kvadrerar i båda leden så är den givna olikheten ekvivalent med

$$10 < 2 + 3 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{3},$$

dvs med $5 < 2\sqrt{6}$. Kvadrera igen så blir detta ekvivalent med $25 < 4 \cdot 6$, som är falskt. Alltså gäller snarare att $\sqrt{10} > \sqrt{2} + \sqrt{3}$.
(b) Detta är FALSKT. T.ex. tag $x = 0$ och $y = -1$. Då är $|x| = 0 < 1 = |y|$, men $|x + 1| = 1 > 0 = |y + 1|$.

(c) Detta är SANT. Olikheten kan skrivas om till

$$(a^2 + b^2 - 2ab) + (c^2 + d^2 - 2cd) \geq 0,$$

som i sin tur kan skrivas som

$$(a - b)^2 + (c - d)^2 \geq 0.$$

Denna sista olikhet är uppenbarligen sant för alla a, b, c, d, ty kvadraterna är aldrig negativa.

(d) Detta är SANT. Talet n lämnar rest $0, 1$ eller 2 vid division med 3. Om resten är noll så är n delbart med 3. Om resten är 1 så blir $n+2$ delbart med 3 medan att om resten är 2 då blir $n + 4$ delbart med 3. Så i vilket fall som helst måste ett av talen $n, n + 2$ och $n + 4$ vara en multipel av 3 så om alla tre ska vara primtal måste n själv vara LIKA med 3.

2 (a) Kvadrera i båda leden så är

$$x + 4 = (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1 \Rightarrow x^2 + x - 3 = 0.$$

Denna kvadratiska ekvation har de två rötterna

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}.$$

Men $x_2 = (-1 - \sqrt{13})/2$ är inte en lösning till den ursprungliga ekvationen, ty $x_2 + 1 < 0$ medan att $\sqrt{x_2 + 4}$ betyder den positiva roten.

Så den enda lösningen till den ursprungliga ekvationen är $x_1 = (-1+\sqrt{13})/2$.

(b) Utför polynomdivision som vanligt.

$$x \cdot (x^2-3) = x^3 - 3x, \quad (x^3+x^2+1) - (x^3-3x) = x^2+3x+1,$$
$$1 \cdot (x^2-3) = x^2-3, \quad (x^2+3x+1) - (x^2-3) = 3x+4.$$

Nu är divisionen slutförd, ty $3x+4$ har lägre grad än x^2-3. Det betyder att divisionen har lämnat $3x+4$ som en rest. Vi har delat in x^2-3 i x^3+x^2+1 totalt $x+1$ ggr, så detta är kvoten.

SVAR : $q(x) = x+1$, $r(x) = 3x+4$.

3. Nämnaren faktoriserar som $x^2(x-3)$. Faktorn x^2 är aldrig negativ så den påverkar inte tecknet på hela kvoten. Men den får inte vara noll ty då är kvoten odefinierad. Av samma skäl måste $x \neq 3$. Så vi måste ha $x \notin \{0,3\}$ och annars söker vi de x sådan att

$$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3} \geq 0.$$

Vi skriver upp en teckentabell. Brytpunkterna är nollsätllena hos de tre faktorerna, nämligen $-1, 2$ och 3.

	$x<-1$	$-1<x<2,\ x\neq 0$	$2<x<3$	$x>3$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$+$	$+$
$x-3$	$-$	$-$	$-$	$+$
$\frac{(x+1)(x-2)}{x-3}$	$-$	$+$	$-$	$+$

Då ser vi att kvoten är strängt positiv om $x \in (-1,2)\setminus\{0\}$ eller om $x \in (3,\infty)$. Kvoten är lika med noll då $x \in \{-1,2\}$.

Sammanlagt gäller olikheten då $x \in ([-1,2]\setminus\{0\}) \cup (3,\infty)$.

Lösningar till den lila versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.
2 (a) $x = (-1+\sqrt{17})/2$.

(b) $q(x) = x + 1$, $r(x) = 2x + 3$.

3. $x \in ([-1, 1] \backslash \{0\}) \cup (3, \infty)$.