Dugga 2 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den GRÖNA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är FALSKT. $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ och $V(\cos x) = [-1, 1]$, som medför att $V(\sec x) = \mathbb{R} \backslash (-1, 1)$.
(b) Detta är SANT. Att det finns färre ekvationer än obekanta medför att systemets matris har färre rader än kolumner i VL. Därför kommer det att finnas minst en kolumn utan pivot i trappstegsformen. Motsvarande variabel är då fri i fall systemet har lösningar ö.h.t.

(c) Detta är FALSKT. Snarare gäller att $\text{Re}(z^2) = (\text{Re } z)^2 - (\text{Im } z)^2$.

(d) Detta är SANT. Om $f(g(x))$ är definierat så måste till att börja med $g(x)$ vara definierat. Alltså $x \in D(f \circ g) \Rightarrow x \in D(g)$, v.s.v.

2 (a) När det gäller definitionsmängden så måste $\frac{x}{x-1} \geq 0$. Från t.ex. en teckentabell ser vi att detta inträffar då $x \leq 0$ eller $x > 1$. Så $D(f) = (-\infty, 0] \cup (1, \infty)$.

När det gäller värdemängden så måste $\sqrt{\frac{x}{x-1}} \geq 0$. Det är ganska klart att $\frac{x}{x-1}$ kan anta vilket som helst icke-negativt värde, och samma gäller därför roten ur det. Så värdemängden för funktionen $\sqrt{\frac{x}{x-1}}$ är $[0, \infty)$, som medför att $V(f) = [1, \infty)$.

(b) I matrisform lyder systemet

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 2 & -1 & 1 & | & -1 \\ 1 & 2 & -2 & | & 7 \end{pmatrix}.$$

Då vi utför radoperationerna

$$R_2 \mapsto R_2 - 2R_1, \quad R_3 \mapsto R_3 - R_1, \quad R_3 \mapsto 3R_3 + R_2,$$

så förvandlas matrisen till trappstegsformen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & -3 & -1 & | & -5 \\ 0 & 0 & -10 & | & 10 \end{pmatrix}.$$

Man kan nu antingen göra bakåtsubstitution eller fortsätta med matrisen och reducera den till RREF. Vi gör det senare genom att utföra radoperationerna

$$R_1 \mapsto 3R_1 + R_2, \quad R_1 \mapsto 5R_1 + R_3, \quad R_2 \mapsto 10R_2 - R_3,$$
$$R_1 \mapsto \frac{1}{15}R_1, \quad R_2 \mapsto -\frac{1}{30}R_2, \quad R_3 \mapsto -\frac{1}{10}R_3.$$

Därmed erhåller vi den reducerade trappstegsformen

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right),$$

som medför att systemet har den unika lösningen $x = 1,\ y = 2,\ z = -1$.

3 (i) Vi söker de två kvadratiska rötterna till $1 + i$. Först konstaterar vi att

$$|1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$
$$\arg(1 + i) = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}.$$

I polär form har vi alltså att

$$z^2 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right). \tag{1}$$

Om $z := r(\cos\theta + i\sin\theta)$ så är $z^2 = r^2(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)$, enligt De Movires sats. Därför, om z uppfyller (1) så måste

$$r^2 = \sqrt{2} \Rightarrow r = \sqrt{\sqrt{2}} = \sqrt[4]{2}$$

och

$$2\theta = \frac{\pi}{4} + 2n\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{8} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Vi får två olika lösningar genom att sätta $n = 0, 1$. Dessa ges i polär form av

$$z_1 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right),$$
$$z_2 = \sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8} + i\sin\frac{9\pi}{8}\right).$$

Notera att $z_2 = -z_1$.

(ii) Det är enklast at beräkna $\cos\frac{\pi}{8}$. En form av dubbleringsformeln för cosinus lyder

$$\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1.$$

Om vi tar $\theta = \frac{\pi}{8}$ så härleder vi att

$$\cos\frac{\pi}{4} = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1 \Rightarrow \cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}.$$

Men vi vet att $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ och därför kan vi dra slutsatsen att

$$\cos\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Notera vidare att, genom att använda formeln $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, man kan också härleda att

$$\sin\frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}.$$

Lösningar till den gröna versionen

1. Sant, falskt, sant, falskt.
2 (a) $D(f) = (-\infty, 0] \cup (2, \infty)$ och $V(f) = [3, \infty)$.
(b) $x = -1,\ y = 2,\ z = 1$.

3. Precis samma uppgift som i den vita versionen.