Dugga 3 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den BLÅA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den VITA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. Om gränsvärdet var ett negativt tal, säg L, skulle det medföra, per definition av gränsvärde, att $f(x)$ antar bara värden närmare och närmare L då $x \to 0$. Så för x tillräckligt nära noll skulle $f(x)$ bara anta värden mindre än $L/2$, t.ex. Detta utesluts av att $f(x)$ antar endast icke-negativa värden för alla $x \geq 0$, oavsett hur nära noll x är.
(b) Detta är FALSKT. Det är sant utan minus tecknet - se avsnitt 2.5 (tabellen på s.123 i 7:e upplagan).
(c) Detta är FALSKT. Medan de allra flesta deriverbara funktionerna kan deriveras om och om igen, det finns motexempel. Ett bra motexempel är funktionen

$$f(x) = \begin{cases} -x^2/2, & \text{då } x \leq 0, \\ +x^2/2, & \text{då } x \geq 0. \end{cases}$$

Denna funktion är deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Bara $x = 0$ behöver kontrolleras ordentligt men där är derviatan noll, ty derivatan går mot noll både från vänster och höger. Nu ser man tydligt att faktiskt $f'(x) = |x|$, absolutbeloppsfunktionen. Alltså är $f'(x)$ ej deriverbar i $x = 0$.

(d) Detta är SANT. $f(x)$ är ett fjärde-grads polynom, därmed uppenbarligen kontinuerlig och deriverbar på hela $\mathbb{R}$. Den har nollställen i de fyra punkterna $x = 0, 3, 5, 11$. Från Rolles sats härleder vi att $f'(x) = 0$ har minst en lösning i var och en av intervallerna $(0, 3), (3, 5)$ och $(5, 11)$. Men $f'(x)$ är ett tredje-grads polynom så den kan inte ha fler än tre nollställen. Därför har $f'(x)$ exakt tre nollställen i $[0, 11]$.

2 (a) Gränsvärdet är $-1/\sqrt{2}$, där minus tecknet uppstår pga att täljaren är negativ och nämnaren positiv då $x \to -\infty$. För ett helt rigoröst bevis, skriv om kvotet så här :

$$\frac{x}{\sqrt{2x^2 - 3x + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2\,(2 - 3/x + 1/x^2)}} = \frac{x}{\sqrt{x^2}\sqrt{2 - 3/x + 1/x^2}}$$
$$= \frac{x}{|x|\sqrt{2 - 3/x + 1/x^2}} = \frac{\operatorname{sgn}(x)}{\sqrt{2 - 3/x + 1/x^2}}.$$

Då $x < 0$ så är $\operatorname{sgn}(x) = -1$. När $x \to -\infty$ så går både $3/x$ och $1/x^2$ mot noll. Därmed går helt kvotet mot $-1/\sqrt{2}$, v.s.v.

(b) Använd kedjeregeln två gånger. Först sätt

$$u = \sqrt{x^2 + 2x + 3}, \quad y = f(x) = \sin u.$$

Enligt kedjeregeln är då

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\,\frac{du}{dx} = (\cos u)\,\frac{du}{dx}.$$

För att beräkna du/dx använder vi kedgeregeln en gång till. Sätt

$$v = x^2 + 2x + 3, \quad u = \sqrt{v} = v^{1/2}.$$

Enligt kedgeregeln är

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv}\,\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{v}}(2x+2) = \frac{x+1}{\sqrt{v}}.$$

Alltså har vi att

$$\frac{dy}{dx} = (\cos u)\,\frac{x+1}{\sqrt{v}}.$$

Om vi skriver allting i termer av x får vi att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}\ \cos(\sqrt{x^2+2x+3}).$$

3 (i) Deriverar vi båda leden implicit m.a.p. x får vi att

$$(2y+1)\frac{dy}{dx} = 3x^2 - 4x - 2 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2-4x-2}{2y+1}.$$

Vid $(3,2)$ gäller då att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3\cdot 3^2 - 4\cdot 3 - 2}{2\cdot 2 + 1} = \frac{13}{5}.$$

Detta är tangentens lutning i punkten $(3,2) = (x_0, y_0)$, så dess ekvation lyder

$$y - 2 = \frac{13}{5}(x-3).$$

(ii) Förlänga kvotet på följande vis :

$$\frac{\sin(x^2-4x)}{\tan(x^2-3x-4)} = \frac{\sin(x^2-4x)}{x^2-4x} \cdot \frac{x^2-3x-4}{\tan(x^2-3x-4)} \cdot \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}.$$

Därför gäller att

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin(x^2-4x)}{\tan(x^2-3x-4)} = \left(\lim_{x\to 4} \frac{\sin(x^2-4x)}{x^2-4x}\right) \left(\lim_{x\to 4} \frac{x^2-3x-4}{\tan(x^2-3x-4)}\right) \left(\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4}\right).$$

Notera att då $x \to 4$ så går både x^2-4x och x^2-3x-4 mot noll. Därför är de två första gränsvärdena ovan både lika med 1. Den tredje parentesen beräknas enligt

$$\lim_{x\to 4} \frac{x^2-4x}{x^2-3x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{x(x-4)}{(x+1)(x-4)} = \lim_{x\to 4} \frac{x}{x+1} \overset{(x:=4)}{=} \frac{4}{5}.$$

Därmed är

$$\lim_{x\to 4} \frac{\sin(x^2-4x)}{\tan(x^2-3x-4)} = 1 \cdot 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5}.$$

Lösningar till den vita versionen

1. Falskt, sant, sant, falskt.
2 (a) $-1/\sqrt{3}$.
(b) $\frac{x+2}{\sqrt{x^2+4x+5}}\ \cos(\sqrt{x^2+4x+5})$.

3 (i) Precis samma uppgift som i den blåa versionen.
(ii) 3/4.