

Dugga 4 : Lösningar

Jag ska ge fullständiga lösningar till den VITA versionen. Eftersom det är likadana uppgifter i den BLÅA versionen så ges bara svaren till dem i slutet.

1 (a) Detta är SANT. $D(\tan^{-1} x) = V(\tan x) = \mathbb{R}$ och

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Eftersom dess derivata är ≥ 1 , och därmed > 0 , för alla $x \in \mathbb{R}$, så är $\tan^{-1} x$ strängt växande på hela $\mathbb{R}$.

(b) Detta är SANT. Betrakta kvotet $f(x)/e^x$. Vi måste visa att detta är en konstant funktion av x . Enligt kvotregeln är

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{e^x} \right) = \frac{e^x f'(x) - f(x)(e^x)'}{(e^x)^2}.$$

Eftersom både $f(x)$ och e^x är lika med sina egna derivator så ser vi att täljaren ovan är noll, alltså derivatan till $f(x)/e^x$ är identiskt noll, som medför att $f(x)/e^x$ är en konstant funktion, v.s.v.

(c) Detta är FALSKT. Det kan vara en inflektionspunkt, men det är inte garanterat. T.ex. tag $f(x) = x^4$ och $x_0 = 0$. Detta är en lokal minimum och $f(x)$ är konvex på hela $\mathbb{R}$. Kom ihåg att en inflektionspunkt, per definition, är en punkt där man byter från konvexitet till konkavitet eller vice versa.

(d) Detta är SANT. Se Sats 4 i avsnitt 3.4.

2 (a) Gränsvärdet är noll. Till att börja med är gränsvärdet icke-negativ, ty allting i sikte är positiv då $x \rightarrow \infty$. Ideén är då att den större av de två exponentialfunktionerna, e^{2x} , dominerar gentemot den största av de tre potensfunktionerna, x^3 . För ett mer rigoröst bevis att gränsvärdet är noll, multiplicera upp och ner med e^{-2x} så ser vi att

$$\frac{x^2 e^x + x^3}{x + e^{2x}} = \frac{x^2 e^{-x} + x^3 e^{-2x}}{x e^{-2x} + 1}.$$

När $x \rightarrow \infty$ kommer alla tre icke-konstant termerna att gå mot noll, ty en exponential slår en potens. Därför blir gränsvärdet $(0+0)/(0+1) = 0$, v.s.v.

(b) Använd kedjeregeln två gånger. Först sätt

$$u = e^{x^2}, \quad y = f(x) = \sin^{-1} u.$$

Enligt kedjeregeln är då

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}.$$

För att beräkna du/dx använder vi kedjeregeln en gång till. Sätt

$$v = x^2, \quad u = e^v.$$

Enligt kedjeregeln är

$$\frac{du}{dx} = \frac{du}{dv} \frac{dv}{dx} = e^v(2x).$$

Alltså har vi att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^v}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Om vi skriver allting i termer av x får vi att

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}.$$

3. Låt θ vara vinkeln över marken dit Kalle siktar och h vara höjden av träffpunkten mellan lasern och byggnadens fasad. Både h och θ varierar (ökar) med tid, och i alla tidpunkter relateras de enligt

$$\tan \theta = \frac{h}{500} \Rightarrow h = 500(\tan \theta).$$

Deriverar vi båda leden m.a.p. tiden t (HL ska deriveras implicit) så härleder vi relationen

$$\frac{dh}{dt} = 500 \sec^2 \theta \frac{d\theta}{dt}.$$

Vi söker VL då $\theta = 30^\circ = \pi/6$ rad. Givet är att $d\theta/dt = 1$ rad/min = $\frac{1}{60}$ rad/s. Alltså i det givna ögonblicket gäller att

$$\frac{dh}{dt} = \frac{500}{60} \left(\sec^2 \frac{\pi}{6} \right) = \frac{500}{60} \frac{1}{\cos^2 \frac{\pi}{6}} = \frac{500}{60} \frac{1}{(\sqrt{3}/2)^2} = \frac{500}{60} \times \frac{4}{3} = \frac{100}{9} \text{ m/s}.$$

Lösningar till den blåa versionen

1. Falskt, sant, sant, sant.

2 (a) 0.

(b) $\frac{3x^2 e^{x^3}}{\sqrt{1-e^{2x^3}}}.$

3. Precis samma uppgift som i den vita versionen.